

**TABLES POUR L'ESTIMATION PAR LA METHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE DU NOMBRE DE COINS DE DROIT (OU DE REVERS) AYANT SERVI A FRAPPER UNE EMISSION**

C. CARCASSONNE (Centre de Mathématique Sociale de l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales)

**NOTE THEORIQUE**

Appelons  $N$  le nombre de coins de droit (ou de revers) qui ont servi à frapper une émission. Nous supposons que chaque coin de droit (ou de revers) a sensiblement la même durée d'utilisation donc un volume de production du même ordre.

Une fois la frappe terminée, on a une proportion  $\frac{1}{N}$  de la production totale pour chacun des  $N$  coins de droit.

Appelons  $n$ , le nombre de pièces dans un échantillon. Nous supposons que cet échantillon peut être considéré en pratique comme résultat d'un tirage au sort dans l'ensemble des monnaies émises. Le modèle de la loi multinomiale peut s'appliquer ici. Notons  $k$  le nombre de coins de droit (ou de revers) représentés dans l'échantillon et donnons un numéro d'ordre à chacun de ces coins,  $1, 2, \dots, k$ . Notons  $r_i$ , le nombre de pièces frappées avec le coin  $i$  dans l'échantillon, et  $z_j$ , le nombre de coins pour lesquels on a le même nombre  $j$  de pièces dans l'échantillon.

D'après la loi multinomiale, la probabilité d'observer  $r_1$  pièces du coin 1,  $r_2$  pièces du coin 2,  $\dots$ ,  $r_N$  pièces du coin  $N$  s'écrit, si  $N$  est le nombre de coins total

$$P(r_1, r_2, r_3, \dots, r_i, \dots, r_N) = \frac{n!}{N^{\sum_{j=1}^n (r_j)} \prod_{j=1}^n (r_j)!} \left(\frac{1}{N}\right)^n$$

La probabilité d'observer  $k$  coins dans l'échantillon sachant qu'il y a  $N$  coins dans l'émission s'écrit

$$P(k/N) = \frac{n!}{N^{\sum_{j=1}^n (r_j)} \prod_{j=1}^n (r_j)!} \left(\frac{1}{N}\right)^n \frac{k!}{n^{\sum_{j=1}^k (z_j)} \prod_{j=1}^k (z_j)!} \binom{N}{k}$$

$N$  est la seule inconnue, une fois l'échantillon constitué.

$P(k/N)$  est maximum lorsque sa dérivée par rapport à  $N$  s'annule. Nous retiendrons la valeur de  $N$  pour laquelle la dérivée de  $P(k/N)$  s'annule comme estimation de  $N$ ; cette valeur  $\hat{N}$  est celle qui rend la plus probable l'échantillon observé. C'est la méthode du *maximum de vraisemblance*.

En dérivant par rapport à  $N$ , on voit que

$P(k/N)$  est maximum pour la valeur de  $N$  obtenue comme solution de l'équation (1) ci-dessous:

$$\frac{n}{N} = \sum_{j=N-k+1}^N \frac{1}{j} \quad (1)$$

Ce type d'équation n'ayant pas de solution entière nous prendrons comme estimation de  $N$ , la valeur entière la plus proche de la solution obtenue. Nous la notons  $\hat{N}$ . La résolution de (1) demande des calculs assez longs.

Nous avons calculé toutes les solutions de (1) pour les échantillons dont l'effectif  $n$  varie de 2 à 100 et dont le nombre de coins observés  $k$  varie de 2 à 50.  $\hat{N}$  est un estimateur exhaustif et asymptotiquement normal de  $N$ . On peut donner une estimation de la variance de  $\hat{N}$

$$\text{Var}(\hat{N}) \cong \frac{N}{\exp\left(\frac{k}{N}\right) - \left(1 + \frac{k}{N}\right)}$$

Comme  $N$  est inconnu, on le remplace par son estimation  $\hat{N}$ , on obtient alors une estimation de la variance de  $\hat{N}$  puis de l'écart-type de  $\hat{N}$ , en prenant la racine carrée de la variance.

L'hypothèse de départ de l'égalité du nombre de pièces frappées par coin n'est pas toujours vérifiée, certains coins ont moins de chances que d'autres de figurer dans l'échantillon; l'utilisation de la table entraîne alors une sous-estimation du nombre de coins de l'émission.

### MODE DE LECTURE DE LA TABLE

On lit:  
 en tête de colonne le nombre de pièces de l'échantillon  
 en début de ligne le nombre de coins de droit (ou de revers) observés dans l'échantillon.

A l'intersection de la ligne  $k$  et de la colonne  $n$ , on lit dans la colonne  $\hat{N}$ , la valeur cherchée  $\hat{N}$  estimation du nombre de coins de droit (ou de revers) dans l'émission, et dans la colonne  $\sigma_{\hat{N}}$ , une approximation de l'écart-type  $\sigma_{\hat{N}}$ .

### EXEMPLE D'UTILISATION

Un échantillon d'*aurei* d'un certain type est constitué de 18 pièces se répartissant de la manière suivante

Coin de droit numéro	Nombre d'exemplaires
1	2
2	4
3	3
4	2
5	1
6	2
7	4
Total	18

ici  $k = 7, n = 18$ .

En examinant la répartition du nombre des exemplaires par coin et en constatant qu'il n'y a pas de trop grandes disparités entre les effectifs on peut dire que l'hypothèse d'égalité du nombre de pièces par coin n'est pas contredite. (Cette hypothèse pourrait être vérifiée par un test de  $\chi^2$  si on le juge nécessaire.)

A l'intersection de la ligne  $k = 7$  et de la colonne  $n = 18$ , on lit dans la colonne  $\hat{N}$ , la valeur cherchée  $\hat{N} = 8$ , et dans la colonne  $\sigma_{\hat{N}}$ ,  $\sigma_{\hat{N}} = 1,132$ .

D'après la loi des grands nombres, les valeurs de  $\hat{N}$  qui s'éloignent de plus de trois écarts-types de la vraie valeur sont si improbables que l'on a à peine besoin de les prendre en considération. La conclusion est donc que le nombre de coins de droit qui ont servi à frapper cette émission d'*aurei* est presque certainement compris entre  $8 - 3\sigma_{\hat{N}}$  et  $8 + 3\sigma_{\hat{N}}$ , soit à peu près entre 7 et 12. On prend 7 comme limite inférieure de l'intervalle d'estimation et non  $8 - 3 = 5$ , car on est sûr d'avoir au moins 7 coins de droit puisque c'est le nombre observé dans l'échantillon; le maximum de vraisemblance donnant une estimation asymptotiquement normale de  $N$ , quand  $n$  n'est pas trop faible (de l'ordre de 30 et au delà), on peut prendre les valeurs de la loi normale comme seuil de probabilité de l'intervalle d'estimation de  $N$ .

$n =$	1		2		3		4		5	
$k$	$\hat{N}$	$\sigma_{\hat{N}}$								
2					2	1.005	2	0.675	2	0.480
3							5	3.428	4	1.796
4									9	6.931

$n =$	6		7		8		9		10	
$k$	$\hat{N}$	$\sigma_{\hat{N}}$								
2	2	0.353	2	0.264	2	0.201	2	0.154	2	0.119
3	3	0.827	3	0.656	3	0.529	3	0.432	3	0.356
4	6	2.890	5	1.738	5	1.458	4	0.801	4	0.679
5	14	11.466	9	4.750	7	2.655	6	1.740	6	1.511
6			19	15.705	12	6.534	9	3.540	8	2.540
7					26	22.235	16	9.116	12	5.066
8							34	29.779	20	11.597
9									42	36.967

$n =$	11		12		13		14		15	
$k$	$\hat{N}$	$\sigma_{\hat{N}}$								
2	2	0.092	2	0.071	2	0.055	2	0.043	2	0.033
3	3	0.295	3	0.246	3	0.206	3	0.173	3	0.145
4	4	0.580	4	0.499	4	0.431	4	0.374	4	0.325
5	6	1.324	5	0.810	5	0.712	5	0.629	5	0.558
6	8	2.250	7	1.570	7	1.405	7	1.263	6	0.831
7	10	3.326	9	2.483	9	2.239	8	1.632	8	1.481
8	15	6.559	13	4.678	12	3.711	11	2.911	10	2.246
9	24	13.963	18	8.003	16	6.023	14	4.415	13	3.576
10	52	46.510	30	18.075	22	10.122	18	6.718	16	5.096
11			63	57.061	35	21.132	26	12.192	22	8.626
12					74	67.223	41	25.011	30	14.203
13							87	79.774	48	29.721
14									101	93.330

$n =$ $k$	16		17		18		19		20	
	$\hat{N}$	$\sigma_{\hat{N}}$								
2	2	0.026	2	0.020	2	0.016	2	0.012	2	0.010
3	3	0.122	3	0.103	3	0.087	3	0.073	3	0.062
4	4	0.284	4	0.248	4	0.218	4	0.191	4	0.168
5	5	0.496	5	0.442	5	0.395	5	0.354	5	0.318
6	6	0.748	6	0.675	6	0.611	6	0.554	6	0.503
7	8	1.350	8	1.235	8	1.132	7	0.784	7	0.719
8	10	2.062	9	1.555	9	1.432	9	1.322	9	1.224
9	12	2.867	11	2.265	11	2.098	11	1.948	10	1.509
10	15	4.228	14	3.484	13	2.843	13	2.650	12	2.137
11	19	6.297	17	4.865	16	4.093	15	3.420	14	2.833
12	25	9.873	22	7.483	20	5.978	18	4.691	17	3.993
13	35	16.909	29	11.725	25	8.646	22	6.580	21	5.730
14	55	34.306	40	19.556	33	13.542	28	9.784	25	7.665
15	115	106.476	63	39.728	45	22.137	37	15.320	32	11.470
16			131	122.033	71	45.018	51	25.427	41	17.056
17					148	138.593	80	51.152	57	28.651
18							165	154.729	89	57.147
19									184	173.290
20										

$n =$ $k$	$\hat{N}$ $\overset{21}{\sigma_{\hat{N}}}$	$\hat{N}$ $\overset{22}{\sigma_{\hat{N}}}$	$\hat{N}$ $\overset{23}{\sigma_{\hat{N}}}$	$\hat{N}$ $\overset{24}{\sigma_{\hat{N}}}$	$\hat{N}$ $\overset{25}{\sigma_{\hat{N}}}$
2	2 0.007	2 0.006	2 0.005	2 0.004	2 0.003
3	3 0.052	3 0.044	3 0.038	3 0.032	3 0.027
4	4 0.147	4 0.130	4 0.114	4 0.100	4 0.088
5	5 0.285	5 0.256	5 0.231	5 0.208	5 0.187
6	6 0.458	6 0.417	6 0.381	6 0.348	6 0.318
7	7 0.660	7 0.607	7 0.558	7 0.515	7 0.475
8	9 1.136	8 0.820	8 0.760	8 0.705	8 0.655
9	10 1.405	10 1.310	10 1.224	10 1.145	10 1.073
10	12 1.998	12 1.873	11 1.483	11 1.392	11 1.308
11	14 2.658	13 2.178	13 2.049	13 1.930	13 1.821
12	16 3.377	16 3.182	15 2.672	15 2.525	14 2.099
13	19 4.557	18 3.918	18 3.706	17 3.170	16 2.692
14	23 6.303	22 5.534	20 4.454	20 4.226	19 3.668
15	28 8.735	26 7.325	24 6.081	23 5.377	22 4.740
16	35 12.553	31 9.787	29 8.338	27 7.048	25 5.900
17	46 19.414	39 14.187	35 11.341	32 9.338	29 7.571
18	63 31.805	51 21.731	43 15.795	38 12.354	35 10.323
19	99 63.991	70 35.677	56 24.005	48 17.965	42 13.873
20	204 192.853	109 70.693	77 39.478	61 26.234	52 19.515
21		224 211.981	119 77.249	84 43.206	67 29.095
22			246 233.544	131 85.654	92 47.658
23				269 256.110	142 92.913
24					292 278.232
25					

n = k	26		27		28		29		30	
	$\hat{N}$	$\sigma_{\hat{N}}$								
2	2	0.002	2	0.002	2	0.001	2	0.001	2	0.001
3	3	0.023	3	0.019	3	0.016	3	0.014	3	0.012
4	4	0.078	4	0.069	4	0.061	4	0.053	4	0.047
5	5	0.169	5	0.152	5	0.138	5	0.124	5	0.112
6	6	0.291	6	0.266	6	0.244	6	0.224	6	0.205
7	7	0.439	7	0.406	7	0.376	7	0.348	7	0.322
8	8	0.609	8	0.567	8	0.529	8	0.493	8	0.460
9	9	0.799	9	0.748	9	0.701	9	0.657	9	0.616
10	11	1.230	11	1.159	11	1.093	11	1.032	10	0.788
11	12	1.469	12	1.387	12	1.311	12	1.241	12	1.176
12	14	1.986	14	1.882	14	1.786	13	1.463	13	1.388
13	16	2.554	16	2.426	15	2.041	15	1.942	15	1.849
14	18	3.167	18	3.014	17	2.585	17	2.464	17	2.351
15	21	4.164	20	3.642	19	3.169	19	3.026	18	2.617
16	24	5.249	23	4.657	22	4.117	21	3.625	21	3.470
17	27	6.413	26	5.750	25	5.144	24	4.589	23	4.081
18	32	8.518	30	7.322	28	6.244	27	5.625	26	5.057
19	38	11.292	35	9.456	33	8.227	31	7.112	29	6.101
20	46	15.374	41	12.245	38	10.383	35	8.709	33	7.589
21	57	21.630	50	16.855	45	13.669	41	11.298	38	9.595
22	73	31.913	62	23.717	54	18.313	49	15.080	45	12.653
23	100	52.037	79	34.685	67	25.772	58	19.748	52	15.980
24	154	101.025	108	56.339	86	38.097	72	27.795	63	21.704
25	317	302.798	167	109.993	117	61.371	92	40.773	77	29.785
26			343	328.365	180	118.812	126	66.327	99	44.091
27					369	353.484	194	128.488	135	71.205
28							397	381.051	208	138.014
29									426	409.620
30										

$m =$ $k$	31		32		33		34		35	
	$\hat{N}$	$\sigma_{\hat{N}}$								
2	2	0.001	2	0.000	2	0.000	2	0.000	2	0.000
3	3	0.010	3	0.008	3	0.007	3	0.006	3	0.005
4	4	0.042	4	0.037	4	0.032	4	0.029	4	0.025
5	5	0.101	5	0.092	5	0.083	5	0.075	5	0.068
6	6	0.188	6	0.173	6	0.159	6	0.146	6	0.134
7	7	0.299	7	0.277	7	0.257	7	0.239	7	0.222
8	8	0.430	8	0.402	8	0.375	8	0.351	8	0.329
9	9	0.579	9	0.544	9	0.511	9	0.481	9	0.452
10	10	0.743	10	0.701	10	0.662	10	0.625	10	0.591
11	12	1.115	12	1.058	12	1.005	11	0.784	11	0.743
12	13	1.319	13	1.254	13	1.194	13	1.137	13	1.084
13	15	1.762	14	1.462	14	1.394	14	1.330	14	1.270
14	16	1.999	16	1.909	16	1.825	16	1.746	15	1.466
15	18	2.502	18	2.395	17	2.055	17	1.968	17	1.886
16	20	3.042	20	2.915	19	2.541	19	2.438	19	2.341
17	22	3.615	22	3.469	21	3.060	21	2.940	21	2.827
18	25	4.535	24	4.054	24	3.897	23	3.473	23	3.343
19	28	5.521	27	4.986	26	4.491	26	4.325	25	3.886
20	32	6.932	30	5.980	29	5.433	28	4.927	28	4.751
21	36	8.446	34	7.394	33	6.778	32	6.205	30	5.359
22	41	10.472	39	9.298	37	8.218	35	7.226	34	6.645
23	48	13.542	45	11.764	42	10.143	40	9.038	38	8.019
24	56	17.357	51	14.417	48	12.623	45	10.980	42	9.477
25	67	23.092	60	18.717	55	15.736	51	13.470	48	11.809
26	83	32.350	72	25.002	65	20.561	59	17.043	55	14.737
27	106	47.361	89	34.885	77	26.890	69	21.885	63	18.337
28	145	76.816	114	51.277	95	37.386	82	28.753	74	23.696
29	223	148.399	155	82.349	121	54.448	101	39.853	88	31.147
30	455	437.734	238	158.631	165	87.803	129	58.267	108	42.903
31			486	468.303	254	169.725	176	93.993	138	62.736
32					518	499.873	270	180.664	187	100.103
33							550	530.985	286	191.446
34									584	564.555
35										

$n =$ $k$	36		37		38		39		40	
	$\hat{N}$	$\hat{\sigma}_N$								
2	2	0.000	2	0.000	2	0.000	2	0.000	2	0.000
3	3	0.004	3	0.004	3	0.003	3	0.003	3	0.002
4	4	0.022	4	0.020	4	0.017	4	0.015	4	0.013
5	5	0.061	5	0.055	5	0.050	5	0.045	5	0.041
6	6	0.123	6	0.113	6	0.104	6	0.096	6	0.088
7	7	0.206	7	0.191	7	0.178	7	0.165	7	0.154
8	8	0.308	8	0.288	8	0.270	8	0.253	8	0.237
9	9	0.426	9	0.401	9	0.378	9	0.356	9	0.336
10	10	0.559	10	0.529	10	0.501	10	0.474	10	0.449
11	11	0.705	11	0.670	11	0.636	11	0.604	11	0.575
12	13	1.033	13	0.986	12	0.783	12	0.746	12	0.712
13	14	1.213	14	1.160	14	1.109	14	1.061	14	1.016
14	15	1.403	15	1.343	15	1.287	15	1.233	15	1.183
15	17	1.809	17	1.736	17	1.667	16	1.414	16	1.357
16	18	2.025	18	1.946	18	1.870	18	1.799	18	1.731
17	20	2.481	20	2.387	20	2.298	19	2.003	19	1.929
18	22	2.966	22	2.858	22	2.755	21	2.433	21	2.347
19	24	3.480	24	3.356	23	2.994	23	2.890	23	2.791
20	27	4.300	26	3.880	26	3.748	25	3.372	25	3.260
21	30	5.175	29	4.712	28	4.281	27	3.878	27	3.752
22	33	6.103	32	5.596	31	5.123	30	4.681	29	4.267
23	36	7.080	35	6.529	34	6.014	33	5.532	32	5.079
24	40	8.455	39	7.845	37	6.951	36	6.428	35	5.937
25	45	10.283	43	9.239	41	8.269	40	7.691	38	6.839
26	51	12.629	48	11.084	46	10.019	44	9.027	42	8.104
27	58	15.561	54	13.440	51	11.877	49	10.794	46	9.439
28	67	19.618	62	16.807	58	14.648	54	12.663	52	11.564
29	78	24.983	71	20.884	66	18.044	61	15.440	58	13.827
30	93	32.961	83	26.757	75	22.134	69	18.829	65	16.632
31	114	45.300	99	35.307	88	28.514	80	23.842	73	20.041
32	146	66.454	121	48.282	105	37.629	93	30.251	84	25.062
33	198	106.133	155	70.825	128	51.229	111	39.925	98	31.969
34	304	204.111	210	112.902	164	75.145	136	54.765	117	42.196
35	619	599.126	321	215.599	222	119.589	173	79.413	143	57.641
36			654	633.236	339	227.951	234	126.195	182	83.630
37					691	669.807	358	241.167	247	133.542
38							729	707.379	377	254.225
39									767	744.486

n = k	41		42		43		44		45	
	$\hat{N}$	$\sigma_{\hat{N}}$								
2	2	0.000	2	0.000	2	0.000	2	0.000	2	0.000
3	3	0.002	3	0.002	3	0.001	3	0.001	3	0.001
4	4	0.012	4	0.010	4	0.009	4	0.003	4	0.007
5	5	0.037	5	0.034	5	0.030	5	0.027	5	0.025
6	6	0.081	6	0.074	6	0.068	6	0.063	6	0.058
7	7	0.143	7	0.133	7	0.124	7	0.115	7	0.107
8	8	0.222	8	0.208	8	0.195	8	0.183	8	0.172
9	9	0.317	9	0.299	9	0.282	9	0.266	9	0.251
10	10	0.425	10	0.403	10	0.382	10	0.363	10	0.344
11	11	0.546	11	0.520	11	0.495	11	0.471	11	0.448
12	12	0.679	12	0.648	12	0.618	12	0.590	12	0.564
13	14	0.974	13	0.786	13	0.752	13	0.719	13	0.689
14	15	1.135	15	1.089	15	1.046	15	1.005	15	0.966
15	16	1.304	16	1.254	16	1.206	16	1.160	16	1.116
16	18	1.667	17	1.426	17	1.373	17	1.323	17	1.275
17	19	1.859	19	1.793	19	1.730	19	1.669	18	1.440
18	21	2.265	20	1.987	20	1.918	20	1.853	20	1.791
19	22	2.478	22	2.394	22	2.315	22	2.239	22	2.166
20	24	2.922	24	2.826	24	2.735	23	2.441	23	2.363
21	26	3.389	26	3.282	26	3.179	25	2.862	25	2.774
22	29	4.133	28	3.759	28	3.644	27	3.305	27	3.205
23	31	4.655	31	4.514	30	4.129	29	3.768	29	3.657
24	34	5.476	33	5.042	32	4.635	32	4.500	31	4.129
25	37	6.340	36	5.871	35	5.428	34	5.012	34	4.871
26	41	7.555	39	6.739	38	6.262	37	5.812	36	5.387
27	45	8.839	43	7.958	42	7.434	40	6.651	39	6.194
28	49	10.188	47	9.241	45	8.356	44	7.827	43	7.326
29	55	12.327	52	10.933	50	9.969	48	9.064	46	8.215
30	61	14.597	58	13.084	55	11.673	53	10.693	51	9.771
31	68	17.402	64	15.359	61	13.833	58	12.408	55	11.078
32	78	21.683	72	18.575	68	16.503	64	14.576	61	13.138
33	89	26.740	82	22.872	76	19.740	71	17.247	67	15.311
34	104	34.182	94	28.405	86	24.047	80	20.894	75	18.375
35	123	44.441	109	35.860	99	30.054	91	25.656	84	22.038
36	151	61.107	130	47.223	115	38.034	104	31.688	95	26.805
37	192	88.501	159	64.538	136	49.415	121	40.189	109	33.305
38	260	140.808	202	93.321	167	67.933	143	52.145	127	42.324

39	397	268.150	273	147.989	212	98.089	175	71.291	150	54.850
40	807	784.058	417	281.915	287	155.915	222	102.803	183	74.612
41			848	824.631	438	296.547	301	163.758	233	108.176
42					889	864.737	459	311.019	315	171.516
43							932	907.310	481	326.589
44									976	950.883

$n =$	$\hat{N} \xrightarrow{46} \hat{\sigma}_N$		$\hat{N} \xrightarrow{47} \hat{\sigma}_N$		$\hat{N} \xrightarrow{48} \hat{\sigma}_N$		$\hat{N} \xrightarrow{49} \hat{\sigma}_N$		$\hat{N} \xrightarrow{50} \hat{\sigma}_N$	
$k$	$\hat{N}$	$\hat{\sigma}_N$								
2	2	0.000	2	0.000	2	0.000	2	0.000	2	0.000
3	3	0.001	3	0.001	3	0.001	3	0.000	3	0.000
4	4	0.006	4	0.006	4	0.005	4	0.004	4	0.004
5	5	0.022	5	0.020	5	0.018	5	0.017	5	0.015
6	6	0.053	6	0.049	6	0.045	6	0.041	6	0.038
7	7	0.100	7	0.093	7	0.086	7	0.080	7	0.075
8	8	0.161	8	0.151	8	0.142	8	0.133	8	0.125
9	9	0.237	9	0.224	9	0.212	9	0.200	9	0.189
10	10	0.326	10	0.310	10	0.294	10	0.279	10	0.265
11	11	0.427	11	0.407	11	0.388	11	0.370	11	0.352
12	12	0.538	12	0.515	12	0.492	12	0.470	12	0.450
13	13	0.660	13	0.632	13	0.606	13	0.581	13	0.557
14	14	0.790	14	0.758	14	0.728	14	0.699	14	0.672
15	16	1.075	16	1.035	16	0.997	16	0.961	15	0.796
16	17	1.229	17	1.185	17	1.143	17	1.103	17	1.065
17	18	1.390	18	1.341	18	1.295	18	1.252	18	1.209
18	20	1.731	20	1.674	20	1.620	19	1.407	19	1.361
19	21	1.911	21	1.850	21	1.791	21	1.735	21	1.681
20	23	2.289	23	2.218	23	2.150	22	1.907	22	1.849
21	25	2.689	24	2.411	24	2.338	24	2.269	24	2.202
22	27	3.111	26	2.812	26	2.730	26	2.651	25	2.387
23	29	3.552	28	3.233	28	3.141	27	2.850	27	2.770
24	31	4.012	30	3.673	30	3.571	29	3.260	29	3.171
25	33	4.490	32	4.131	32	4.018	31	3.689	31	3.591
26	36	5.240	35	4.851	34	4.483	34	4.365	33	4.027
27	38	5.762	38	5.609	37	5.212	36	4.836	36	4.712

$m =$	$\hat{N} \xrightarrow{46} \hat{\sigma}_N$		$\hat{N} \xrightarrow{47} \hat{\sigma}_N$		$\hat{N} \xrightarrow{48} \hat{\sigma}_N$		$\hat{N} \xrightarrow{49} \hat{\sigma}_N$		$\hat{N} \xrightarrow{50} \hat{\sigma}_N$	
$k$	$\hat{N}$	$\hat{\sigma}_N$								
28	42	6.852	41	6.402	40	5.976	39	5.571	38	5.186
29	45	7.709	44	7.229	43	6.774	42	6.341	41	5.930
30	49	8.904	47	8.089	46	7.604	45	7.143	44	6.704
31	53	10.154	51	9.284	50	8.759	48	7.975	47	7.509
32	58	11.792	56	10.853	54	9.967	52	9.132	51	8.628
33	64	13.861	61	12.501	59	11.549	57	10.649	55	9.797
34	71	16.411	67	14.578	64	13.206	62	12.241	59	11.015
35	79	19.496	74	17.131	71	15.646	67	13.905	65	12.929
36	88	23.172	83	20.609	78	18.219	74	16.350	71	14.941
37	100	28.390	92	24.295	87	21.714	82	19.301	77	17.048
38	114	34.907	105	29.962	97	25.829	91	22.810	85	19.997
39	133	44.439	120	36.974	109	31.070	101	26.930	95	23.896
40	157	57.527	139	46.533	125	38.542	114	32.616	106	28.444
41	192	78.527	165	60.748	145	48.606	131	40.578	120	34.601
42	244	113.496	201	82.405	172	63.371	152	51.182	137	42.598
43	330	180.020	255	118.763	210	86.246	180	66.538	159	53.737
44	503	341.538	345	188.440	266	123.976	219	90.050	188	69.679
45	1020	993.987	525	356.556	360	196.774	278	129.849	229	94.450
46			1066	1039.561	549	373.472	376	205.857	290	135.669
47					1113	1086.135	572	389.196	392	214.854
48							1160	1132.238	596	405.788
49									1209	1180.812

$m =$	$\hat{N} \xrightarrow{71} \hat{\sigma}_N$		$\hat{N} \xrightarrow{72} \hat{\sigma}_N$		$\hat{N} \xrightarrow{73} \hat{\sigma}_N$		$\hat{N} \xrightarrow{74} \hat{\sigma}_N$		$\hat{N} \xrightarrow{75} \hat{\sigma}_N$	
$k$	$\hat{N}$	$\hat{\sigma}_N$								
2	2	0.000	2	0.000	2	0.000	2	0.000	2	0.000
3	3	0.000	3	0.000	3	0.000	3	0.000	3	0.000
4	4	0.000	4	0.000	4	0.000	4	0.000	4	0.000
5	5	0.002	5	0.002	5	0.002	5	0.001	5	0.001
6	6	0.007	6	0.006	6	0.006	6	0.005	6	0.005
7	7	0.017	7	0.015	7	0.014	7	0.013	7	0.012
8	8	0.033	8	0.031	8	0.030	8	0.028	8	0.026
9	9	0.058	9	0.055	9	0.052	9	0.049	9	0.047
10	10	0.091	10	0.087	10	0.082	10	0.078	10	0.075
11	11	0.132	11	0.126	11	0.121	11	0.115	11	0.110

$n =$ $k$	$\hat{N}$	$\sigma_{\hat{N}}^{71}$	$\hat{N}$	$\sigma_{\hat{N}}^{72}$	$\hat{N}$	$\sigma_{\hat{N}}^{73}$	$\hat{N}$	$\sigma_{\hat{N}}^{74}$	$\hat{N}$	$\sigma_{\hat{N}}^{75}$
12	12	0.182	12	0.174	12	0.167	12	0.160	12	0.153
13	13	0.238	13	0.229	13	0.220	13	0.212	13	0.204
14	14	0.302	14	0.291	14	0.281	14	0.271	14	0.261
15	15	0.373	15	0.360	15	0.348	15	0.336	15	0.325
16	16	0.450	16	0.435	16	0.421	16	0.407	16	0.394
17	17	0.532	17	0.516	17	0.500	17	0.485	17	0.470
18	18	0.621	18	0.602	18	0.585	18	0.567	18	0.551
19	19	0.714	19	0.694	19	0.674	19	0.655	19	0.637
20	21	0.916	20	0.791	20	0.769	20	0.748	20	0.728
21	22	1.024	22	0.997	22	0.972	22	0.947	22	0.923
22	23	1.136	23	1.107	23	1.080	23	1.053	23	1.027
23	24	1.252	24	1.221	24	1.192	24	1.163	24	1.135
24	25	1.372	25	1.339	25	1.308	25	1.277	25	1.247
25	27	1.624	27	1.587	27	1.550	27	1.515	26	1.362
26	28	1.755	28	1.716	28	1.677	28	1.640	28	1.604
27	30	2.028	29	1.848	29	1.807	29	1.768	29	1.730
28	31	2.169	31	2.123	31	2.078	31	2.034	30	1.859
29	33	2.462	32	2.265	32	2.217	32	2.171	32	2.127
30	34	2.612	34	2.559	34	2.506	34	2.456	33	2.265
31	36	2.923	36	2.864	35	2.655	35	2.602	35	2.550
32	37	3.082	37	3.021	37	2.961	37	2.903	37	2.847
33	39	3.410	39	3.343	39	3.279	38	3.058	38	3.000
34	41	3.748	41	3.676	41	3.606	40	3.376	40	3.312
35	43	4.097	43	4.020	42	3.774	42	3.704	42	3.635
36	45	4.456	45	4.373	44	4.117	44	4.042	44	3.968
37	47	4.825	47	4.736	47	4.650	46	4.389	46	4.311
38	50	5.396	49	5.109	49	5.017	48	4.746	46	4.662
39	52	5.789	52	5.685	51	5.394	50	5.113	50	5.023
40	55	6.394	54	6.081	53	5.779	53	5.678	52	5.393
41	58	7.020	57	6.690	56	6.373	55	6.066	55	5.963
42	61	7.664	60	7.319	59	6.986	56	6.664	57	6.354
43	64	8.327	63	7.966	62	7.617	61	7.280	60	6.955
44	67	9.007	66	8.631	65	8.266	64	7.914	63	7.574
45	71	9.942	69	9.313	68	8.933	67	8.566	66	8.210
46	75	10.907	73	10.249	72	9.848	70	9.234	69	8.864
47	79	11.901	77	11.214	76	10.792	74	10.150	73	9.760
48	83	12.924	82	12.460	80	11.764	78	11.095	77	10.684
49	88	14.240	86	13.488	84	12.764	82	12.067	81	11.636
50	94	15.875	91	14.811	89	14.051	87	13.319	85	12.614

n = k	96		97		98		99		100	
	$\hat{N}$	$\sigma_{\hat{N}}$								
2	2	0.000	2	0.000	2	0.000	2	0.000	2	0.000
3	3	0.000	3	0.000	3	0.000	3	0.000	3	0.000
4	4	0.000	4	0.000	4	0.000	4	0.000	4	0.000
5	5	0.000	5	0.000	5	0.000	5	0.000	5	0.000
6	6	0.001	6	0.001	6	0.001	6	0.001	6	0.001
7	7	0.003	7	0.003	7	0.002	7	0.002	7	0.002
8	8	0.007	8	0.007	8	0.006	8	0.006	8	0.005
9	9	0.014	9	0.014	9	0.013	9	0.012	9	0.012
10	10	0.026	10	0.025	10	0.024	10	0.022	10	0.021
11	11	0.042	11	0.040	11	0.039	11	0.037	11	0.035
12	12	0.064	12	0.061	12	0.058	12	0.056	12	0.054
13	13	0.090	13	0.087	13	0.083	13	0.080	13	0.077
14	14	0.122	14	0.118	14	0.113	14	0.109	14	0.106
15	15	0.159	15	0.154	15	0.149	15	0.144	15	0.139
16	16	0.201	16	0.195	16	0.189	16	0.183	16	0.177
17	17	0.248	17	0.240	17	0.233	17	0.227	17	0.220
18	18	0.299	18	0.291	18	0.283	18	0.275	18	0.267
19	19	0.355	19	0.346	19	0.337	19	0.328	19	0.319
20	20	0.416	20	0.405	20	0.395	20	0.385	20	0.375
21	21	0.480	21	0.468	21	0.457	21	0.445	21	0.435
22	22	0.548	22	0.535	22	0.523	22	0.510	22	0.498
23	23	0.620	23	0.606	23	0.592	23	0.579	23	0.565
24	24	0.696	24	0.680	24	0.665	24	0.650	24	0.636
25	25	0.774	25	0.758	25	0.741	25	0.725	25	0.710
26	27	0.942	27	0.922	27	0.904	27	0.885	27	0.867
27	28	1.030	28	1.009	28	0.989	28	0.970	28	0.950
28	29	1.121	29	1.099	29	1.078	29	1.057	29	1.036
29	30	1.215	30	1.192	30	1.169	30	1.147	30	1.125
30	31	1.311	31	1.287	31	1.263	31	1.239	31	1.216
31	33	1.512	33	1.485	32	1.359	32	1.335	32	1.310
32	34	1.616	34	1.588	34	1.560	34	1.532	34	1.506
33	35	1.723	35	1.693	35	1.664	35	1.635	35	1.607
34	37	1.943	36	1.801	36	1.770	36	1.740	36	1.710
35	38	2.057	38	2.023	38	1.989	38	1.956	37	1.816
36	39	2.173	39	2.137	39	2.102	39	2.068	39	2.034
37	41	2.411	41	2.372	40	2.217	40	2.181	40	2.146
38	42	2.533	42	2.493	42	2.453	42	2.415	42	2.377
39	44	2.783	44	2.740	43	2.574	43	2.534	43	2.495

n = k	96		97		98		99		100	
	$\hat{N}$	$\hat{\sigma}_N$								
40	45	2.911	45	2.866	45	2.822	45	2.779	45	2.737
41	47	3.173	47	3.125	47	3.078	46	2.905	46	2.861
42	49	3.443	48	3.257	48	3.209	48	3.161	48	3.115
43	50	3.580	50	3.527	50	3.476	50	3.425	49	3.244
44	52	3.860	52	3.804	52	3.749	51	3.559	51	3.508
45	54	4.148	54	4.088	53	3.889	53	3.833	53	3.779
46	56	4.442	56	4.379	55	4.173	55	4.114	55	4.056
47	58	4.742	57	4.527	57	4.463	57	4.401	56	4.198
48	60	5.050	59	4.827	59	4.760	59	4.695	58	4.485
49	62	5.363	62	5.290	61	5.064	61	4.995	60	4.778
50	64	5.683	64	5.606	63	5.373	63	5.301	62	5.078

## COMPARACION DE ALGUNOS METODOS DE ESTIMACION DEL NUMERO DE CUÑOS ORIGINALES, A PARTIR DE MUESTRAS SIMULADAS

F. X. MORA MAS (Societat Catalana d'Estudis Numismàtics)

1. Introducción.
2. Preparación de las Muestras.
3. Características estadísticas de las muestras.
4. Ordenación de los métodos simples.
5. Verificación de los métodos según la media de los resultados.
6. Verificación integral de algunos métodos según la media de los resultados.
7. Comparación de los métodos según los resultados individuales sobre cada muestra.
8. Conclusiones.

Este trabajo se presentó conjuntamente con el de Madame C. CARCASSONNE, "Tables pour l'estimation par la methode du maximum de vraisemblance du nombre de coins de droit (ou de revers) ayant servi a frapper une emission", y en colaboración.

Ambos trabajos constituyen una extensión de las tareas que sobre el tema de la "estimación del número de cuños originales" se iniciaron en la Table Ronde de París en 1979.

### 1. INTRODUCCION

Durante la "Table Ronde 1979", celebrada en París en el mes de setiembre, se puso de manifiesto el interés de los numismáticos para conocer el grado de confianza que ofrecen los métodos de estimación del número de cuños originales de una acuñación, a partir de la información estadística contenida en las muestras de monedas antiguas.

Cada método supone unas hipótesis de partida, se apoya en unos principios de razonamiento lógico y establece un procedimiento de desarrollo del razonamiento para alcanzar un resultado. Para cualquiera de los métodos, el resultado sólo es una "estimación" del valor cierto, aunque generalmente es desconocido. Esencialmente, en cada método se trata de obtener la mejor separación posible del determinismo propio de la acuñación, de la aleatoriedad inherente a la formación de la muestra.

Los diversos autores han creado sus métodos con buenas razones de origen; pero la verificación de los métodos debe realizarse independientemente de sus razones fundamentales; sólo así se puede depositar la correspondiente confianza a cada método. Se debe pues recurrir al campo de la aplicación práctica de los métodos, para lo cual se cuenta con dos alternativas posibles: una actuando sobre hallazgos de monedas de acuñaciones reales, y otra actuando sobre muestras simuladas artificialmente.

Cuando se examinan muestras reales nos hallamos con el inconveniente de que, por lo general, desconocemos las características de la acuñación. En algunos casos, poco frecuentes, las monedas llevan marcas de ordenación de los cuños que permiten tener una idea directa bastante exacta del número de cuños originales; sin embargo, siempre desconoceremos el grado de la menor o mayor regularidad en la producción de monedas según los diferentes cuños, que puede afectar notablemente a la estructura estadística de la muestra.

Las muestras elaboradas artificialmente tienen la ventaja de que conocemos necesariamente las características originales de la acuñación simulada. Los resultados obtenidos con los métodos que se apliquen pueden ser comparados con los valores ciertos, ahora conocidos por haberse aplicado en la simulación. Con este procedimiento se pueden verificar los métodos; en primer lugar corresponde examinar los métodos simples; luego se debe trasladar el problema a la simulación bajo condiciones de hipótesis más reales, con el fin de seleccionar y mejorar la metodología en su conjunto.

Calificamos de "normal" a una acuñación cuando la productividad en cantidad de monedas por cuño, según los distintos cuños, tiende a ser sensiblemente igual. Sin embargo, los casos de anormalidad son especialmente probables en las acuñaciones de monedas antiguas, realizadas evidentemente con una menor uniformidad tecnológica.

Así pues, al simple problema estadístico-matemático, propio de las acuñaciones normales, se asocia el factor de la desigual productividad de los cuños. Esta circunstancia destruye el supuesto de la igual probabilidad apriorística de la presencia de los distintos cuños en la muestra.

También la eventual preferencia que los usuarios de las monedas hayan podido tener sobre algunos cuños concretos, originaría un efecto perturbador análogo.

De principio, pues, hemos de distinguir dos grandes grupos de métodos: los "simples" que suponen una igual probabilidad apriorística para la presencia de todos los cuños, y los "especiales" que tienen en consideración la posibilidad de una desigual probabilidad apriorística. A los numismáticos les interesan evidentemente los métodos especiales; sin embargo, difícilmente se pueden resolver los casos especiales si antes no se ha desarrollado satisfactoriamente la metodología para los casos simples.

Este trabajo considera únicamente a los métodos simples para resolver los casos de acuñaciones-muestreo normales, y se ha recurrido a la segunda alternativa de la verificación de los métodos sobre muestras simuladas artificialmente, por la ventaja que representa el conocimiento de las hipótesis originales de la acuñación simulada.

En atención a cuanto se ha expresado en este mismo apartado, para la verificación y comparación de los métodos simples se ha considerado conveniente actuar como sigue:

- 1, incluir sólo los métodos conformes con la hipótesis de una igual probabilidad apriorística para la presencia de los cuños;
- 2, anotar las características originales de la acuñación y asegurar, en lo posible, el cumplimiento de la hipótesis de la normalidad
- 3, ordenación y agrupación de los métodos según sean los principios de sus razonamientos, para facilitar el análisis de la metodología, y
- 4, atender a la dimensión de la prueba estadística para que los resultados se concreten con tendencias confiables.

Este trabajo debe tomarse como un primer ensayo que nos proporciona unas conclusiones previas; las cuales, eventualmente, podrán ser verificadas con investigaciones más exhaustivas. Pero además, este trabajo nos proporciona unas orientaciones valiosas para llevar a cabo estudios más precisos, completos y adecuados a la realidad del problema.

## 2. PREPARACION DE LAS MUESTRAS

Las muestras de las supuestas acuñaciones se han obtenido mediante la técnica numérica de la simulación. A través de un computador programado se ha procedido a la generación interna de números aleatorios uniformes (n.a.u.), o sea, números que apriorísticamente se distribuyen según la ley de igual densidad de probabilidad para cualquier punto del campo de variación de la variable.

Para la generación interna de los n.a.u. se ha empleado una simple relación recurrente que constituye el llamado "método multiplicativo congruente"; en realidad lo que se logra es la generación de números casi-aleatorios, que pueden ser aceptados como aleatorios después de verificar su "uniformidad".

El generador de los nn.aa.uu. empleado, con el factor 997 como multiplicador, ha sido verificado con las pruebas de frecuencia y de secuencia ("frequency test" y "serial test") para un campo de extensión superior al necesario para obtener todas las muestras del conjunto. El resultado de la verificación es bastante aceptable, aun cuando no alcanza una plena satisfacción.

En la figura n.º 1 se muestra el detalle de la generación de una de las muestras; corresponde a la 1.ª muestra del grupo I (n = 20 cuños originales; g = 25 monedas), véase la tabla I (1/2).

Siguiendo este mismo procedimiento se ha completado la simulación de cuatro grupos de muestras, correspondiente a cuatro supuestos de acuñación-muestreo normales. En cada grupo se han preparado 10 muestras. En la tabla I se han reunido las muestras obtenidas:

- Grupo I:  $n = 20$  cuños originales y  $g = 25$  monedas;
- Grupo II:  $n = 40$  cuños originales y  $g = 25$  monedas;
- Grupo III:  $n = 40$  cuños originales y  $g = 50$  monedas, y
- Grupo IV:  $n = 80$  cuños originales y  $g = 50$  monedas.

### 3. CARACTERISTICAS ESTADISTICAS DE LAS MUESTRAS

Mediante el proceso estocástico de las cadenas de Markov nos es posible obtener la estadística exacta de la variable "número de cuños distintos en la muestra", para cada uno de los supuestos de acuñación. Obtenidas las cuatro estadísticas, cada una de las muestras puede ser situada sobre el eje de abscisas de la correspondiente estadística teórica.

La estadística de la variable "h", número de cuños distintos en la muestra para el tamaño de muestra de "g" monedas, no obedece a ninguna de las formas estadísticas recogidas en los textos de los manuales habituales (tales como las formas de Gauss-Laplace, Binomial, Poisson, etc.) Según entendemos, la estadística objeto de nuestra cuestión sólo puede ser obtenida a través del proceso estocástico de las cadenas de Markov, en el que se tiene en consideración el árbol completo de las posibilidades de formación de las muestras.

El fundamento para la obtención de esta estadística se muestra en la figura n.º 2, donde se hallan también las expresiones que permiten pasar del vector de probabilidades correspondiente a la muestra de "g-1" ejemplares al vector correspondiente a la muestra de "g" ejemplares. Los cálculos se inician con la muestra de un solo ejemplar, donde el único elemento de probabilidad corresponde a la identificación de un solo cuño al 100%, o sea,  $\text{prob}(h = 1) = 100\%$ .

Mediante el auxilio de un calculador, necesario por el volumen de cálculo que se debe realizar, se puede pasar de la muestra con un ejemplar a la muestra de "g" ejemplares, aplicando iterativamente la expresión que se halla en la figura n.º 2.

Los valores de probabilidades de la variable para los 4 supuestos de acuñación-muestreo normales se han reunido en la tabla II. Las mismas estadísticas se muestran gráficamente en las figuras números 3, 4, 5 y 6 (E-1, E-2, E-3 y E-4 respectivamente).

Sobre cada una de las estadísticas teóricas se han situado las estadísticas experimentales obtenidas con las 10 muestras para cada grupo. Desde luego, el número de muestras es escaso; pero puede observarse como en las respectivas figuras la media de cada grupo de muestras se desvía ligeramente hacia posiciones de menor valor con relación al teórico respectivo; véanse las siguientes diferencias:

- grupo I:  $13,90 - 14,45 = -0,55$  ,  $-3,81\%$ ;
- grupo II:  $18,40 - 18,76 = -0,36$  ,  $-1,92\%$ ;
- grupo III:  $28,30 - 28,72 = -0,42$  ,  $-1,46\%$ ;
- grupo IV:  $37,00 - 37,35 = -0,35$  ,  $-0,94\%$ .

La causa de esta tendencia hacia valores inferiores a los esperados se atribuye a una ligera imperfección del generador de nn,aa,uu. Sin embargo esta circunstancia no constituye problema que merezca más atención, por cuanto todos los métodos se hallarán igualmente afectados.

### 4. ORDENACION DE LOS METODOS SIMPLES

Los métodos simples que se tienen en consideración en este estudio son los que se hallaron implicados, directa o indirectamente, en el programa de trabajo de la "Table Ronde 1979". Como es obvio, se han excluido los métodos especiales que suponen hipótesis de partida distintas de las normales, y también se han excluido algunos métodos simples que manifiestamente han sido superados (tal es por ejemplo de Brown basado en el número de cuños pares presentes en la muestra, que denominamos método Brown-1). La relación de los métodos considerados figura en la tabla III.

En la tabla III los métodos se presentan ordenados después de haber sido clasificados según los datos que emplean de la información estadística contenida en la muestra. Para la clasificación se tiene en cuenta la estadística observada de las frecuencias de las repeticiones de los cuños, sin proceder a su reducción con relación al número total de cuños distintos observados.

La nomenclatura empleada es la siguiente:

- g: número total de monedas (ejemplares) en la muestra;
- h: número total de cuños distintos presentes en la muestra;
- h(k): frecuencia correspondiente a los cuños cuya presencia se repite "k" veces en la muestra;
- n: número total de cuños originales, valor cierto generalmente desconocido;
- n̂: estimación del número total de cuños originales, que incluye la clase de los cuños ausentes en la muestra.

En calidad de observadores de una muestra bajo situaciones reales, que implica el desconocimiento de la clase de los cuños ausentes, podemos obtener de la estadística de las repeticiones unas características estadísticas; centrando la atención en los momentos ordinarios, no centrados, tenemos los siguientes valores:

$m_0$  : momento nulo (observado)

$$m_0 = \sum_{k=1}^g k^0 \cdot h(k) = h$$

$m_1$  : momento primero

$$m_1 = \sum_{k=1}^g k^1 \cdot h(k) = g$$

$m_2$  : momento segundo

$$m_2 = \sum_{k=1}^g k^2 \cdot h(k)$$

$m_a$  : momento atípico

$$m_a = \sum_{k=1}^g y(k) \cdot h(k)$$

y(k) : función de "k" distinta de la potenciación.

Debe tenerse en cuenta que el momento de orden nulo observado en las situaciones reales no coincide con el que resultaría de una observación completa, con la inclusión de la clase de los cuños ausentes.

Como momento atípico se ha considerado genéricamente a todo aquél que se obtiene sustituyendo a la función de potenciación por otra distinta. El método de Brown-II emplea el número de las posibles asociaciones pares entre las monedas dentro de cada clase de repeticiones, en vez de una simple potencia de "k"; el número de asociaciones pares constituye una función de "k" cuya expresión es la correspondiente al número de permutaciones:

$$y(k) = \frac{h(k) \cdot (h(k)-1)}{2}$$

En la figura n.º 7 se muestra la estadística de las repeticiones según se ha observado para una muestra (muestra n.º 1 del grupo I), con los correspondientes valores de las características estadísticas mencionadas.

En la tabla III se relacionan los métodos, los datos base empleados y las correspondientes fórmulas de resolución. En cuanto a los datos, todos los métodos emplean, evidentemente, el momento primero,  $m_1 = g$ , que es el número de monedas que contiene la muestra; luego utilizan un segundo dato que particulariza al método.

Los cuatro primeros relacionados, Lyon-II, Guilbaud-II, Mora-Mas-I y Carcassonne, emplean como segundo dato el momento nulo observado,  $m_0 = h$ , número de cuños distintos en la muestra.

Los métodos "Carcassonne" y "Mora-Mas-I" coinciden en cuanto a los principios fundamentales y difieren sólo en el procedimiento; los resultados de ambos coinciden en un sólo valor. El método "Carcassonne" alcanza la solución a través de un teorema de mucho valor, que simplifica extraordinariamente la solución de "máxima verosimilitud" o de "mayor probabilidad de ser cierto". La verificación de ambos métodos se consignarán, en adelante, como si se tratara de un sólo método bajo de denominación de Carcassonne.

Los métodos "Müller" y "Brown-II" abandonan el momento nulo, teóricamente inconsistente, y lo sustituyen por un momento de orden superior al primero; Müller utiliza el momento segundo, y Brown (II) utiliza el momento atípico antes mencionado (número de asociaciones pares).

Los métodos "Good" y "Mora-Mas-II" emplean como segundo dato base las proporciones entre las distintas clases de cuños. En el método de Good se recurre a la proporción del número de cuños singulares con relación a la totalidad de los presentes; mientras de en el segundo se tienen en cuenta las proporciones de todas las clases presentes.

## 5. VERIFICACION DE LOS METODOS SEGUN LA MEDIA DE LOS RESULTADOS

Se ha procedido a la aplicación sistemática de los distintos métodos relacionados en la tabla III a las muestras simuladas de la tabla I. Cada uno de los métodos proporciona un valor por muestra que es una estimación del valor cierto del número de cuños originales, la cual se hallará más o menos próxima al valor real.

Aun cuando el valor real es necesariamente un número entero, la estimación puede ser expresada con una fracción; incluso esta forma de dar el resultado es más correcta porque nos permite determinar su desviación con más precisión cuando se compara con el valor real. Por lo tanto, en todos los casos que ha sido posible se ha optado en dar los resultados con dos decimales.

Los resultados de la aplicación de los métodos figuran en la tabla IV (recordamos que los del método Mora-Mas-I coinciden con los del método Carcassonne), parte superior de la misma.

El número de los cuños distintos que se manifiestan en una muestra constituye un indicador de la mayor o menor regularidad en la formación aleatoria de la misma muestra, según se aproxime más o menos al valor más probable. Tomando pues a esta variable "número de cuños distintos" asociada a la "estimación del número de cuños originales", ha sido posible la presentación bidimensional de los resultados. En la figura n.º 8 se muestra un ejemplo de esta representación correspondiente a los resultados obtenidos con el método Brown-II aplicado a las muestras del grupo I.

En este trabajo se ha supuesto una regresión lineal para tener una simple idea de la sensibilidad de los métodos a las distorsiones de la aleatoriedad; sin embargo, la verdadera regresión podría ser muy distinta de la lineal. Téngase en cuenta además, que los métodos cuyo dato base es el número de los cuños distintos les corresponde un coeficiente de correlación elevado, por evidente naturaleza del método; pero el coeficiente de correlación no sirve para seleccionar la bondad del método.

Así pues, para cada método se han obtenido un conjunto de características estadísticas propias de la aplicación del mismo, las cuales figuran en la tabla IV, parte inferior y son las siguientes:

- 1) "media" de los valores de las estimaciones del número de cuños originales, obtenidos con las muestras del mismo grupo;
- 2) "desv. típica", desviación típica del mismo conjunto de valores;
- 3) "regr. pend.", pendiente de la recta de regresión de la estimación con relación al número de cuños distintos;
- 4) "ord. origen", ordenada en el origen del eje de abcisas de la misma recta de regresión; y
- 5) "correlación", coeficiente de correlación de la recta de regresión anterior.

Puede comprobarse como la media de las 10 estimaciones tiene una buena aproximación al valor real para todos los métodos, especialmente para los de "Good", "Guilbaud-II" y "Lyon-II"; la media más distanciada corresponde al método "Mora-Mas-II".

También se puede comprobar la excesiva sensibilidad de todos los métodos con relación a las desviaciones de las muestras respecto a la tendencia media. La sensibilidad está representada por la pendiente de la recta de regresión; cuanto más baja sea la pendiente tanto mejor es el método. Los de menos pendiente son los de "Brown-II" (grupo I y IV), "Mora-Mas-II" (grupo II) y "Good" (grupo III); sin embargo, no existe una clara diferenciación en este sentido.

En resumen podemos formular las siguientes conclusiones sobre este apartado:

- 1.<sup>a</sup>) Todos los métodos aportan resultados medios muy próximos al valor real;
- 2.<sup>a</sup>) Todos son muy sensibles a las desviaciones de aleatoriedad de las muestras;
- 3.<sup>a</sup>) Los resultados son muy similares; para establecer una selección haría falta realizar la aplicación sobre un mayor número de muestras simuladas.

## 6. VERIFICACION INTEGRAL DE ALGUNOS METODOS SEGUN LA MEDIA DE LOS RESULTADOS

Los métodos de estimación que se basan en el número de cuños distintos en la muestra son susceptibles de una verificación completa; tales métodos son los "Lyon-II", "Guilbaud-II" y "Carcassonne" (incluyendo el "Mora-Mas-I").

Con la aplicación de los procesos estocásticos de Markov es posible conocer la estadística del "número de cuños distintos" para cada hipótesis del número de cuños originales; ello representa una visión ergódica de todas las muestras posibles. Con este recurso queda marginada la necesidad de la simulación de un número grande de muestras. Las estadísticas en cuestión son las que se ofrecen en la tabla II.

En la tabla V se reúne el detalle y los resultados de esta verificación integral. Para cada uno de los grupos, hipótesis de acuñación, se han hallado las correspondientes estimaciones para cada valor de la variable "h"; habida cuenta de las probabilidades "p(h)" de las estadísticas mencionadas se puede componer la media y otros momentos.

Los resultados son (media y desviación de la media):

Grupo I	acuñación de n = 20 y muestras de g = 25		
	LYON-II	21,074	+1,074
	GUILBAUD-II	20,740	+0,740
	CARCASSONNE	20,054	+0,054
Grupo II	acuñación de n = 40 y muestras de g = 25		
	LYON-II	45,947	+5,947
	GUILBAUD-II	44,482	+4,482
	CARCASSONNE	43,929	+3,929
Grupo III	acuñación de n = 40 y muestras de g = 50		
	LYON-II	41,056	+1,056
	GUILBAUD-II	40,918	+0,918
	CARCASSONNE	40,036	+0,036
Grupo IV	acuñación de n = 80 y muestras de g = 50		
	LYON-II	85,125	+5,125
	GUILBAUD-II	83,850	+3,850
	CARCASSONNE	83,233	+3,233

Se observa que la aproximación de la media obtenida con el método de "Carcassonne" supera indiscutiblemente a la de los otros dos. Sin embargo, los resultados son muy similares y el paralelismo de los mismos es extraordinariamente grande; cuestión que se puede comprobar observando los resultados en la tabla V. Incluso se puede llegar a sospechar que los principios de los métodos de "Lyon-II" y "Guilbaud-II" coincidan con los de "Carcassonne", diferenciándose únicamente en el procedimiento de resolución empleando fórmulas aproximadas.

## 7. COMPARACION DE LOS METODOS SEGUN LOS RESULTADOS INDIVIDUALES SOBRE CADA MUESTRA

Cuando se procede a la aplicación de uno cualquiera de los métodos en la resolución de un problema real, nos hallamos ante la circunstancia de que tenemos una sola muestra, aparte del desconocimiento de si se verifican las hipótesis normales. Por lo tanto, consideramos oportuno comparar el comportamiento de los métodos tomando los resultados individuales en vez de las medias.

Recordamos que en la simulación realizada se ha procurado el cumplimiento de las hipótesis normales, especialmente la de igual productividad de los cuños.

Cada muestra representa una oportunidad para la aplicación de los métodos simples (para hipótesis normales), y en cada ocasión podemos comprobar cuál de los resultados se haya acercado más al valor real. Haciendo lo propio con todas las muestras, 40 en total, se pueden contabilizar las frecuencias para cada uno de los métodos en proporcionar la mejor aproximación.

Esta comparación se ha hecho tomando el mínimo valor absoluto de las desviaciones; primero tomando los métodos dos a dos y luego tomando simultáneamente los 7 métodos distintos. Las desviaciones absolutas de los resultados con relación a los valores ciertos se han reunido en la tabla VI.

De la primera operación no ha sido posible establecer una distinción favorable para alguno o algunos de los métodos, al compararlos dos a dos. Sin embargo, cuando se consideran simultáneamente se observa un resultado muy significativo; en la misma tabla VI se han señalado, dentro de cada línea, las desviaciones más pequeñas y el resultado obtenido ha sido el siguiente:

BROWN-II	14 veces,
GOOD	12
MORA-MAS-II	12
MÜLLER (")	1
CARCASSONNE	1
GUILBAUD-II	0
LYON-II	0

Nota ("): Los resultados del método MÜLLER se hallan expresados en números enteros; su resolución con decimales podría variar algo las frecuencias indicadas.

De este resultado se deduce en primera apreciación, que en las aplicaciones reales sobre acuñaciones-muestreo normales los métodos basados en las proporciones de las distintas clases de repetición de los cuños (Good y Mora-Mas-II) y el basado en el momento atípico de las asociaciones pares (Brown-II) se aproximan más al valor cierto con más frecuencia que los métodos basados en el número de cuños distintos. Y entre los tres métodos mencionados, con los datos obtenidos, no es posible establecer una selección significativa.

## 8. CONCLUSIONES

Durante el desarrollo de este trabajo, según ha sido expuesto, se han dado ya algunas conclusiones mientras que otras también han quedado patentes; sin embargo consideramos propio proceder a su recopilación final, como sigue:

1) De los métodos simples, propios para las muestras apriorísticamente normales, basados en el número de cuños distintos, entendemos que el método de Carcassonne proporciona la respuesta matemática más correcta, justificada por un sólido teorema.

2) En este trabajo, no se ha analizado la eficacia de los procedimientos simples cuando se aplican sobre muestras apriorísticamente anormales, o sea, con cuños de distinta productividad. Convendría una extensión del trabajo en este sentido; ya que de ello se podría deducir una distinta evaluación de los métodos simples.

3) El método de Brown (Brown-II), dado que proporciona resultados muy buenos, debería ser analizado de nuevo con mayor profundidad para poner en evidencia los principios de su fundamento.

4) También el método de Good debería ser analizado en cuanto a sus principios fundamentales. Los métodos basados en la distribución de los cuños según las distintas clases de repeticiones, ofrecen mayores posibilidades para el desarrollo de mejoras metodológicas en el campo de las aplicaciones reales. Conviene pues centrar sobre estos métodos los esfuerzos para conseguir un procedimiento genérico que supere en lo posible a la actual metodología.

5) Dado que en la realidad, al problema de la aleatoriedad del muestreo se asocia la cuestión ineludible de la desigual productividad de los cuños, con la particularidad de que se desconoce el grado de esta desigualdad, conviene tener una medida de la verosimilitud de la estructura estadística de las muestras. A través del fraccionamiento analítico de las muestras se podrá tener una idea de la distribución de distintos niveles de uniformidad de productividad de los cuños; luego se podrá recurrir a los métodos simples según corresponda. La primera parte de esta tarea podrá ser desarrollada gracias al cálculo de la característica estadística "ji-cuadrado" que proporciona el método de "la mínima ji-cuadrado" (Mora-Mas-II).

6) Entendemos que lo más propio para un próximo trabajo es el desarrollo de la tarea sobre un conjunto de muestras simuladas apriorísticamente anormales, con niveles de productividad cuidadosamente elegidos, con el intento de conseguir un procedimiento genérico. Luego el procedimiento podría ser propuesto a la satisfacción de los numismáticos a través de aplicaciones comparativas sobre muestras reales.

## Anexo I

### REFERENCIAS DE ORIGEN DE LOS METODOS

1. LYON-II. "Table Ronde 1979"; fórmula facilitada por el Dr. Carter. Se distingue con el calificativo "II" para diferenciarlo de la presentación del autor en "Numismatic Circular" de September 1965.
2. GUILBAUD II. "Table Ronde 1979"; fórmula facilitada por el Dr. Carter. Se distingue con el calificativo "II" para diferenciarlo de otro estudio del autor en el "Bulletin de la Société Française de Numismatique" de Juillet 1974.
3. MORA-MAS-I. Método publicado en "Acta Numismática VII" de 1977. Resolución por procesos estocásticos.
4. CARCASSONNE. Fórmula comunicada por el propio autor, Mad. C. Carcassonne, que lo denomina "Método de la máxima verosimilitud".
5. MÜLLER. Método basado en los momentos primero y segundo; para hallar el resultado se emplea un gráfico. Los resultados utilizados en este estudio han sido facilitados por el propio autor.
6. BROWN-II. "Table Ronde 1979". Se distingue con el calificativo "II" para diferenciarlo del método referido en "The British Numismatic Journal, XXVIII", 1955-57, basado en el número de cuños pares.
7. GOOD. "Table Ronde 1979"; fórmula facilitada por el Dr. Carter.
8. MORA-MAS-II. Método presentado por el autor en la "Table Ronde 1979"; denominado también "Método de la mínima ji-cuadrado".

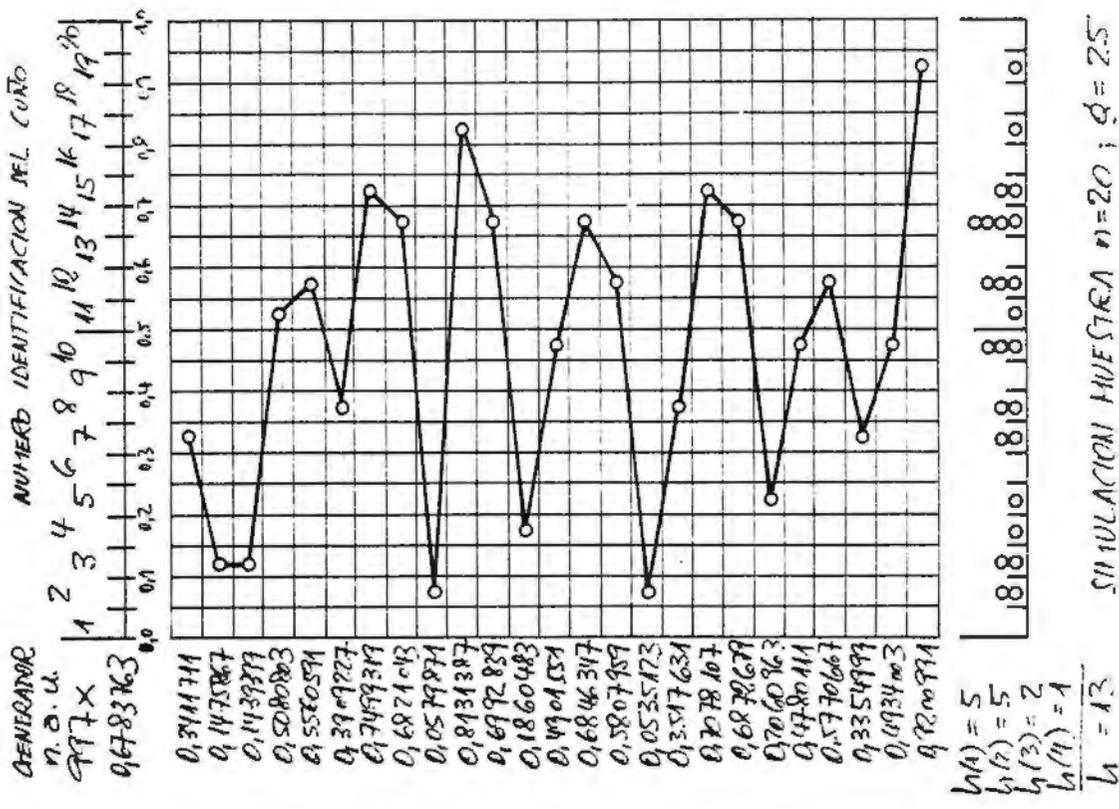
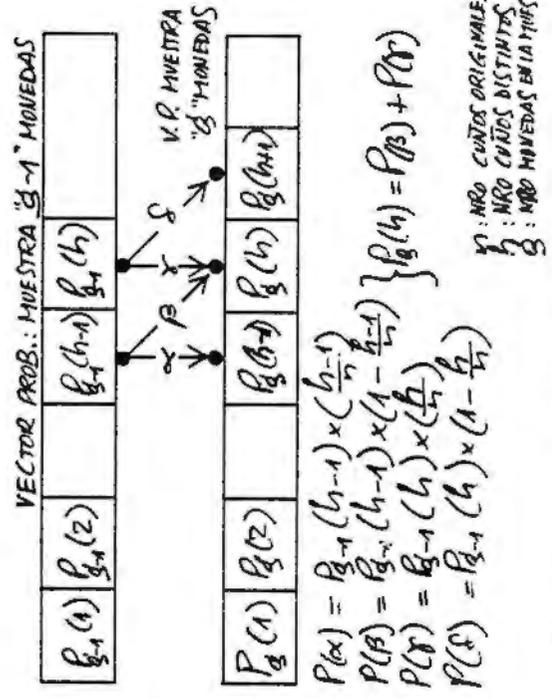
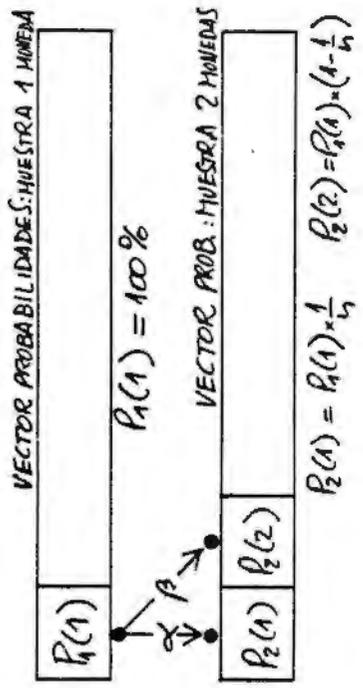


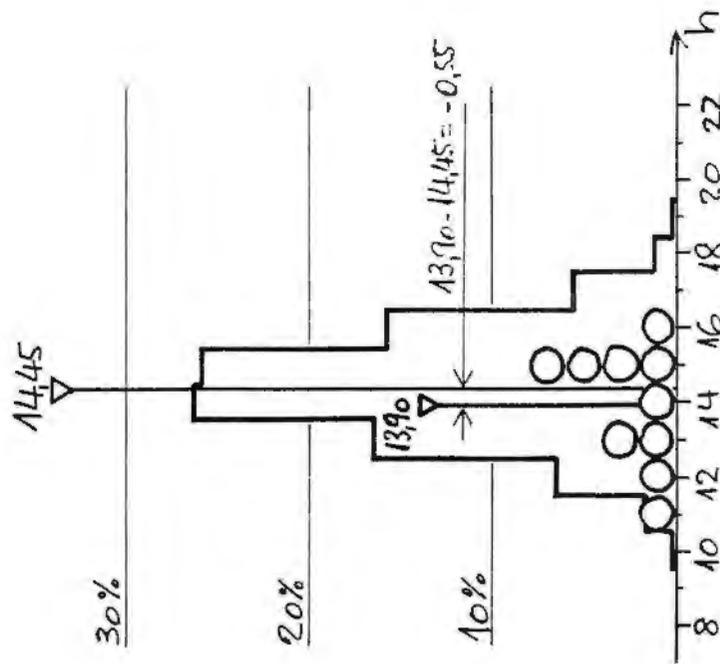
Figura n°1



$$P_n(h) = P_{n-1}(h-1) \times (1 - \frac{h-1}{n}) + P_{n-1}(h) \times \frac{h}{n}$$

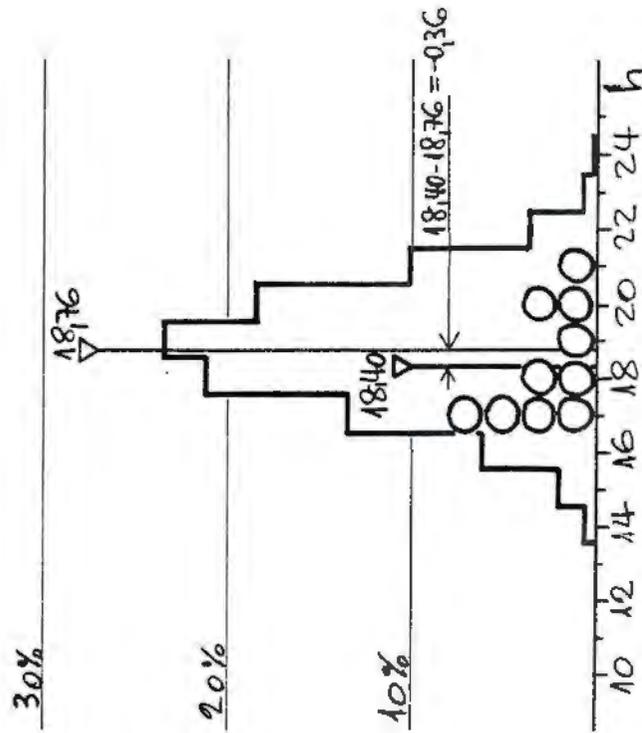
PROCESO PARA OBTENER LA ESTADISTICA DEL NRO. CUÑOS DISTINTOS

Figura n°2



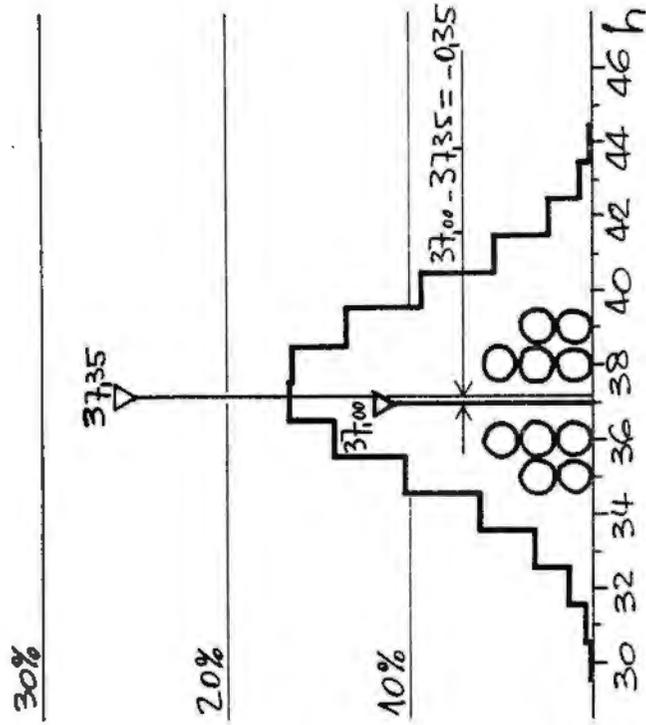
ESTADISTICA DEL NUMERO DE CUÑOS DISTINTOS  
 $n = 20 \quad \sigma = 2.0$

Figura no 3



ESTADISTICA DEL NUMERO DE CUÑOS DISTINTOS  
 $n = 40 \quad \sigma = 0.36$

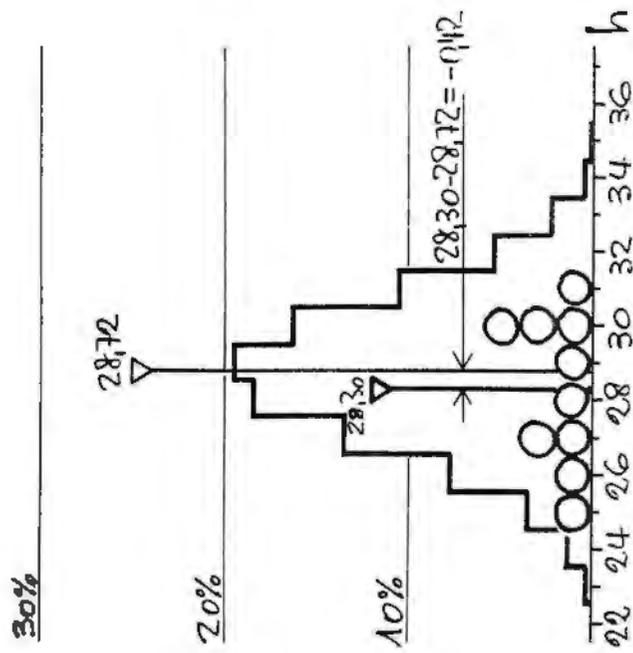
Figura no 4



ESTADÍSTICA DEL NÚMERO DE CONOS DISTINTOS

$n = 80 \quad \xi = 50$

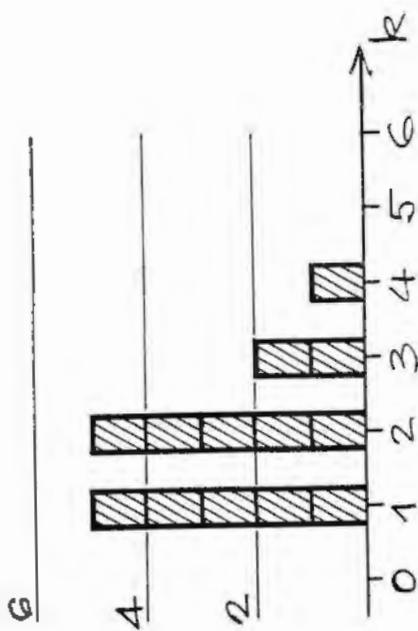
Figura nº 6



ESTADÍSTICA DEL NÚMERO DE CONOS DISTINTOS

$n = 40 \quad \xi = 50$

Figura nº 5



$$m_0 = 5 + 5 + 2 + 1 = 13$$

$$m_1 = 5 + 10 + 6 + 4 = 25$$

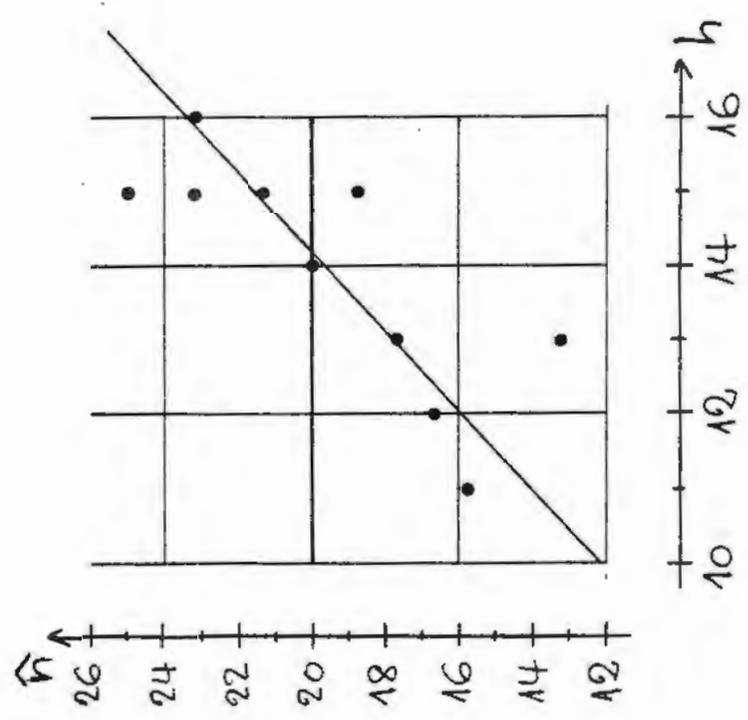
$$m_2 = 5 + 20 + 18 + 16 = 59$$

$$m_a = 0 + 10 + 6 + 6 = 22$$



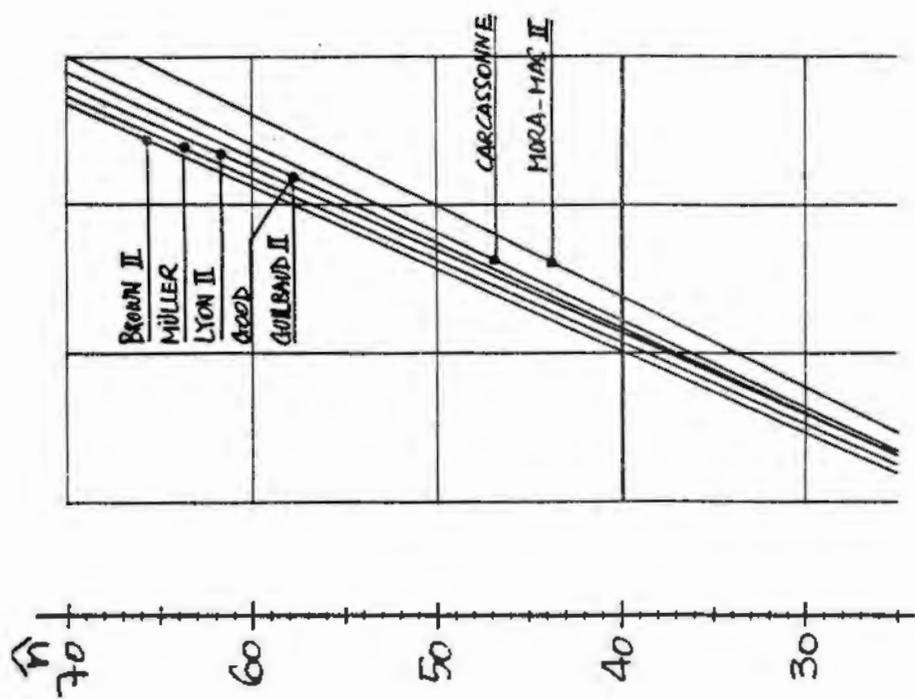
ESTADISTICA DE LAS REPETICIONES - OBSERVACION LIMITADA - MUESTRA FIG-1 Y CARACTERISTICAS EST.

Figura no 7



RECTA DE REGRESION  $\hat{h} - h$  DE LA APLICACION DEL METODO BROWN - II

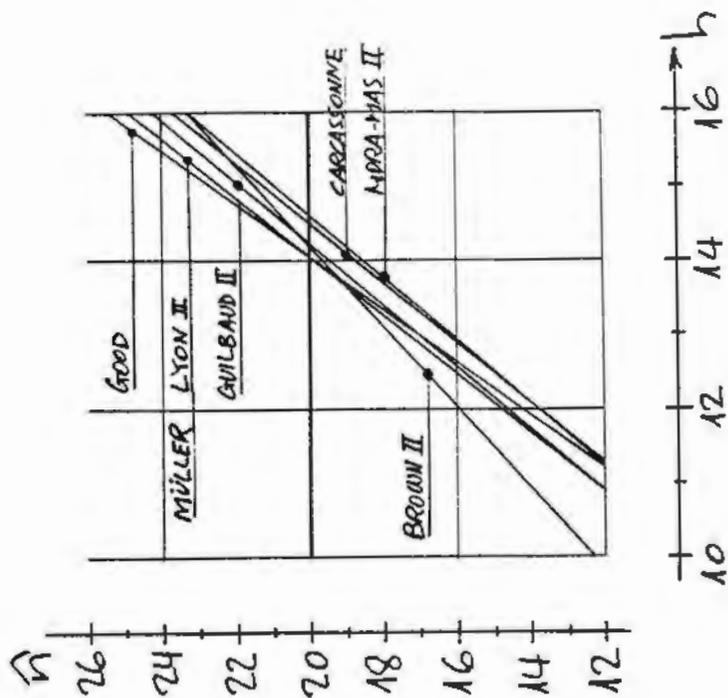
Figura no 8



16 18 20 22 h

RECTAS DE REGRESION GRUPO II

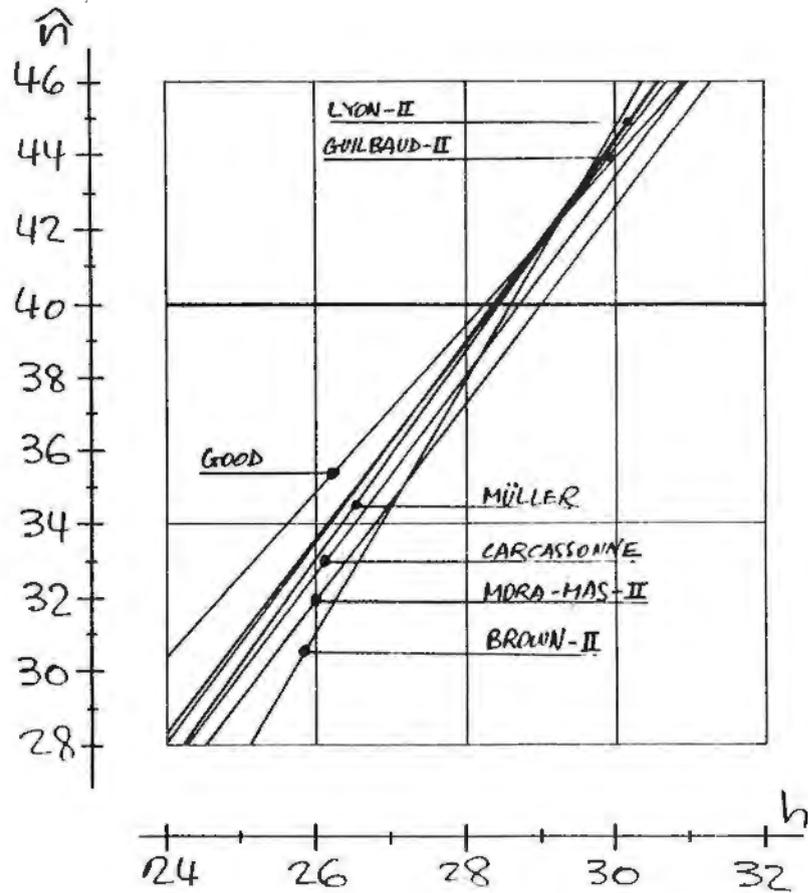
Figura no 10



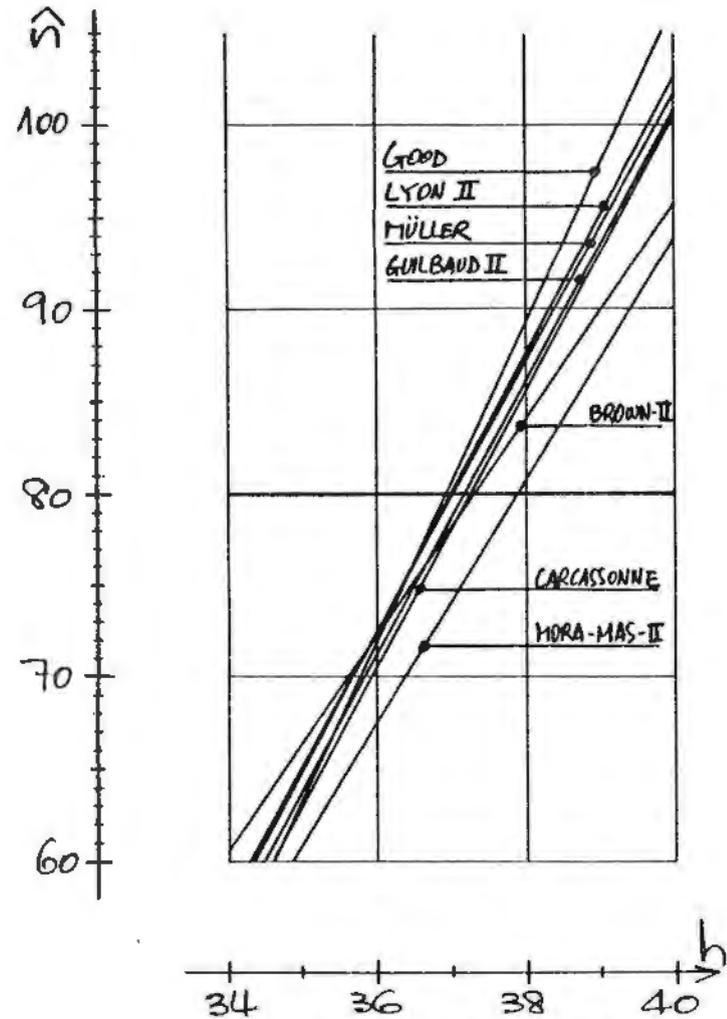
10 12 14 16 h

RECTAS DE REGRESION - GRUPO I

Figura no 9



RECTAS DE REGRESION -GRUPO III  
Figura nº 11



RECTAS DE REGRESION -GRUPO IV  
Figura nº 12

TABLA I (1/2) .- MUESTRAS SIMULADAS.

GRUPO I : n=20 CUÑOS ORIGINALES ; g=25 MONEDAS							
<u>n.a.u.</u>	<u>h(1)</u>	<u>h(2)</u>	<u>h(3)</u>	<u>h(4)</u>	<u>h(5)</u>	<u>h(6)</u>	<u>h</u>
0,6783763	5	5	2	1	-	-	13
0,9200991	2	4	5	-	-	-	11
0,9216987	7	6	2	-	-	-	15
0,4466759	9	2	4	-	-	-	15
0,9969763	7	7	0	1	-	-	15
0,3802991	6	5	1	0	0	1	13
0,2530987	10	1	3	1	-	-	15
0,0364759	6	6	1	1	-	-	14
0,5155763	4	3	5	-	-	-	12
0,2404991	10	4	1	1	-	-	16

GRUPO II : n=40 CUÑOS ORIGINALES ; g=25 MONEDAS							
<u>n.a.u.</u>	<u>h(1)</u>	<u>h(2)</u>	<u>h(3)</u>	<u>h(4)</u>	<u>h(5)</u>	<u>h(6)</u>	<u>h</u>
0,3844987	17	4	-	-	-	-	21
0,2262759	16	3	1	-	-	-	20
0,2341763	9	8	-	-	-	-	17
0,5006991	12	5	1	-	-	-	18
0,3158987	15	5	-	-	-	-	20
0,0160759	9	8	-	-	-	-	17
0,1527763	14	4	1	-	-	-	19
0,1608991	10	6	1	-	-	-	17
0,0472987	13	4	0	1	-	-	18
0,4058759	12	3	1	1	-	-	17

n.a.u. : número aleatorio uniforme inicial

TABLA I (2/2) .- MUESTRAS SIMULADAS (continuación).

GRUPO III : n=40 CUÑOS ORIGINALES ; g=50 MONEDAS							
<u>n.a.u.</u>	<u>h(1)</u>	<u>h(2)</u>	<u>h(3)</u>	<u>h(4)</u>	<u>h(5)</u>	<u>h(6)</u>	<u>h</u>
0,2713763	16	10	2	2	-	-	30
0,7586987	15	11	3	1	-	-	30
0,5899763	16	7	4	2	-	-	29
0,9100987	14	5	4	1	2	-	26
0,1085763	13	14	3	-	-	-	30
0,0414987	11	6	5	3	-	-	25
0,8271763	18	10	1	1	1	-	31
0,9728987	13	8	4	1	1	-	27
0,7457763	14	8	4	2	-	-	28
0,7042987	14	8	3	0	1	1	27

GRUPO IV : n=80 CUÑOS ORIGINALES ; g=50 MONEDAS							
<u>n.a.u.</u>	<u>h(1)</u>	<u>h(2)</u>	<u>h(3)</u>	<u>h(4)</u>	<u>h(5)</u>	<u>h(6)</u>	<u>h</u>
0,8643763	21	13	1	-	-	-	35
0,2356987	31	6	1	1	-	-	39
0,1829763	26	7	2	1	-	-	36
0,5670987	28	8	2	-	-	-	38
0,7015763	24	11	0	1	-	-	36
0,6984987	28	8	2	-	-	-	38
0,4201763	29	9	1	-	-	-	39
0,6298987	30	4	4	-	-	-	38
0,3387763	23	9	3	-	-	-	35
0,3612987	26	7	2	1	-	-	36

n.a.u. : número aleatorio uniforme inicial

TABLA II (1/2) .- ESTADISTICAS DE LA VARIABLE  
"NUMERO DE CUÑOS DISTINTOS".

E-1 : n=20 CUÑOS ORIGINALES ; g=25 MONEDAS

h	p(h)	$\sum^h p(x)$	
9	0,02 %	0,02 %	
10	0,24	0,26	
11	1,61	1,87	
12	6,51	8,38	
13	16,47	24,85	
14	26,14	50,99	
15	25,98	76,97	media:
16	15,91	92,88	$\bar{h} = 14,45$
17	5,81	98,69	desviación típica:
18	1,19	99,87	s = 1,43
19	0,12	100	

E-2 : n=40 CUÑOS ORIGINALES ; g=25 MONEDAS

h	p(h)	$\sum^h p(x)$	
12	0,01 %	0,01 %	
13	0,08	0,09	
14	0,47	0,56	
15	2,01	2,57	
16	6,15	8,72	media:
17	13,47	22,19	$\bar{h} = 18,76$
18	21,12	43,31	desviación típica:
19	23,58	66,89	s = 1,67
20	18,53	85,42	
21	10,04	95,46	
22	3,62	99,08	
23	0,82	99,90	
24	0,10	100	

TABLA II (2/2) .- ESTADISTICAS DE LA VARIABLE  
"NUMERO DE CUÑOS DISTINTOS".  
(cont.)

E-3 : n=40 CUÑOS ORIGINALES ; g=50 MONEDAS

h	p(h)	$\sum^h p(x)$	
21	0,01 %	0,01 %	
22	0,09	0,10	
23	0,38	0,48	
24	1,34	1,82	
25	3,67	5,49	
26	7,95	13,44	
27	13,59	27,03	
28	18,36	45,39	
29	19,52	64,91	media:
30	16,29	81,20	$\bar{h} = 28,72$
31	10,62	91,82	desviación típica:
32	5,35	97,17	s = 2,02
33	2,07	99,24	
34	0,61	99,85	
35	0,13	99,98	
36	0,02	100	

E-4 : n=80 CUÑOS ORIGINALES ; g=50 MONEDAS

h	p(h)	$\sum^h p(x)$	
28	0,01 %	0,01 %	
29	0,04	0,05	
30	0,15	0,20	
31	0,49	0,69	
32	1,36	2,05	
33	3,14	5,19	
34	6,15	11,34	
35	10,16	21,50	media:
36	14,15	35,65	$\bar{h} = 37,35$
37	16,59	52,24	desviación típica:
38	16,52	68,76	s = 2,36
39	13,42	81,98	
40	9,18	91,16	
41	5,19	96,35	
42	2,41	98,76	
43	0,90	99,66	
44	0,27	99,93	
45	0,06	99,99	
46	0,01	100	

TABLA III.- METODOS SIMPLES PARA LA ESTIMACION DEL NUMERO DE CUÑOS ORIGINALES - FORMULAS. - - - - -

METODO	DATOS (base)	FORMULA
1 LYON-II	$m_1$ $m_0$	$\frac{h}{g} \cdot \frac{g}{\hat{n}} + e^{-\frac{g}{\hat{n}}} - 1 = 0$
2 GUILBAUD-II	$m_1$ $m_0$	$\hat{n} = \frac{g(g-1)}{2 \cdot (g-h)} - \frac{(g-2)}{3} - \frac{(g-h)}{18}$
3 MORA-MAS-I	$m_1$ $m_0$	$\hat{n}$ (max. prob. Bayes) proceso estocástico
4 CARCASSONNE	$m_1$ $m_0$	$\hat{n}$ (max. verosimilitud) $\frac{g}{\hat{n}} - \sum_{k=\hat{n}-d+1}^{k=\hat{n}} \frac{1}{k} = 0$
5 MÜLLER	$m_1$ $m_2$	$D = (h \cdot m_2 - m_1) / h$ $\hat{n} = f(D, h)$ (gráfico)
6 BROWN-II	$m_1$ $m_a$	$\hat{n} = \frac{g \cdot (g-1)}{2 \cdot m_a}$ ( $m_a$ : en la $a$ ª pas.)
7 GOOD	$m_1$ prop. $[h(1), \cdot h]$	$\hat{n} = \frac{g \cdot h}{g - h(1)}$
8 MORA-MAS-II	$m_1$ prop. $[h(1), h(2), \dots, h(k)]$	$\sum_{k=1}^{k=g} \frac{[h(k) - z(k)]^2}{z(k)} = \min.$ $z(k) = E_{\hat{n}} [h(k)]$

véase el anexo I: "Referencias de origen de los métodos".

TABLA IV (1/4) RESULTADOS DE LA APLICACION DE LOS METODOS - MUESTRAS DEL GRUPO I.

Método:	Lyon-II	Guilbaud-II	Oarcassonne	Müller	Brown-II	Good	Mora-Mas-II
n=13	16,80	16,67	15,91	17	17,65	16,25	16,19
11	12,84	12,98	12,08	13	15,79	11,96	12,36
15	22,21	21,78	21,11	23	25,00	20,83	21,20
15	22,21	21,78	21,11	22	21,43	23,44	20,55
15	22,21	21,78	21,11	22	23,08	20,83	20,55
13	16,80	16,67	15,91	17	13,04	17,11	14,76
15	22,21	21,78	21,11	22	18,75	25,00	21,20
14	19,27	18,99	18,31	19	20,00	18,42	18,31
12	14,69	14,69	13,88	15	16,67	14,29	13,76
16	25,77	25,17	24,56	26	23,08	26,67	23,57
media:	19,50	19,23	18,51	19,60	19,45	19,48	18,25
desv. típica:	4,09	3,86	3,94	4,06	3,76	4,74	3,76
regr. pend.:	2,55	2,40	2,46	2,52	1,85	2,84	2,33
ord. origen:	-15,94	-14,17	-15,63	-15,35	-6,33	-20,03	-14,13
correlación:	0,9934	0,9929	0,9935	0,9881	0,7865	0,9568	0,9868

TABLA IV (2/4) RESULTADOS DE LA APLICACION DE LOS METODOS - MUESTRAS DEL GRUPO II.

Método:	Lyon-II	Guilbaud-II	Oarcassonne	Müller	Brown-II	Good	Mora-Mas-II
n=21	69,55	67,11	66,60	71	75,00	65,63	62,29
20	53,86	52,06	51,53	54	50,00	55,56	49,26
17	30,20	29,39	28,80	31	37,50	26,56	26,75
18	35,86	34,80	34,24	36	37,50	34,62	34,12
20	53,86	52,06	51,53	55	60,00	50,00	47,45
17	30,20	29,39	28,80	31	37,50	26,56	26,75
19	43,38	42,00	41,46	44	42,86	43,18	41,12
17	30,20	29,39	28,80	31	33,33	28,33	28,28
18	35,86	34,80	34,24	35	30,00	37,50	29,28
17	30,20	29,39	28,80	30	25,00	32,69	26,75
media:	41,32	40,04	39,48	41,80	42,86	40,06	37,21
desv. típica:	13,62	13,05	13,09	13,94	15,05	13,31	12,36
regr. pend.:	8,89	8,52	8,54	9,06	8,97	8,67	8,04
ord. origen:	-122,30	-116,77	-117,70	-124,88	-122,24	-119,40	-110,77
correlación:	0,9828	0,9827	0,9828	0,9782	0,8975	0,9801	0,9797

TABLE IV (3/4) RESULTADOS DE LA APLICACION DE LOS METODOS - MUESTRAS DEL GRUPO III.

Método:	Lyon-II	Guilbaud-II	Carcassonne	Müller	Brown-II	Good	Mora-Mas-II
h=30	44,40	44,14	43,32	44	43,75	44,12	42,59
30	44,40	44,14	43,32	45	47,12	42,86	43,26
29	41,33	41,17	40,30	41	39,52	42,65	40,28
26	33,58	33,71	32,71	33	28,59	36,11	32,02
30	44,40	44,14	43,32	45	53,26	40,54	42,59
25	31,39	31,61	30,56	31	31,41	32,05	30,51
31	47,78	47,42	46,64	47	42,24	48,44	44,94
27	35,94	35,98	35,01	36	34,03	36,49	34,64
28	38,53	38,46	37,56	39	38,28	38,89	37,40
27	35,94	35,98	35,01	35	29,17	37,50	32,51
media:	39,77	39,68	38,78	39,60	38,74	39,97	38,07
desv. típica:	5,48	5,29	5,38	5,64	8,09	4,74	5,34
regr. pend.:	2,73	2,63	2,68	2,80	3,43	2,24	2,63
ord. origen:	-37,49	-34,83	-37,03	-39,73	-56,22	-23,34	-36,43
correlación:	0,9976	0,9975	0,9976	0,9953	0,8476	0,9461	0,9871

TABLE IV (4/4) RESULTADOS DE LA APLICACION DE LOS METODOS - MUESTRAS DEL GRUPO IV.

Método:	Lyon-II	Guilbaud-II	Carcassonne	Müller	Brown-II	Good	Mora-Mas-II
h=35	65,67	64,83	64,17	67	76,56	60,34	61,69
39	96,28	94,75	94,17	94	81,67	102,63	81,65
36	71,70	70,72	70,08	71	64,47	75,00	67,59
38	86,74	85,42	84,82	87	87,50	86,36	83,28
36	71,70	70,72	70,08	72	72,06	69,23	64,31
38	86,74	85,42	84,82	87	87,50	86,36	83,28
39	96,28	94,75	94,17	97	102,08	92,86	92,27
38	86,74	85,42	84,82	85	76,56	95,00	76,33
35	65,67	64,83	64,17	66	68,06	64,81	62,50
36	71,70	70,72	70,08	71	64,47	75,00	67,59
media:	79,92	78,76	78,14	79,70	78,09	80,76	74,05
desv. típica:	11,94	11,67	11,70	11,54	11,92	13,99	10,70
regr. pend.:	7,62	7,44	7,46	7,32	5,86	8,60	6,49
ord. origen:	-201,88	-196,69	-198,05	-191,07	-138,56	-237,39	-166,22
correlación:	0,9971	0,9971	0,9971	0,9917	0,7682	0,9611	0,9491

TABLA V (2/2) CALCULO DE LA MEDIA ERGODICA DE LOS RESULTADOS DE ALGUNOS METODOS.

TABLA V (1/2) CALCULO DE LA MEDIA ERGODICA DE LOS RESULTADOS DE ALGUNOS METODOS.

		LYON-II		GUILBAUD-II		CARGASSONNE	
E-1) n=20 cuños originales, g=25 monedas							
h	p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}.p(h)$	$\hat{n}$	$\hat{n}.p(h)$	$\hat{n}$	$\hat{n}.p(h)$
9	0,0002	9,78	0,002	10,19	0,002	9,08	0,002
10	0,0024	11,22	0,027	11,50	0,028	10,63	0,026
11	0,0161	12,84	0,207	12,98	0,209	12,08	0,194
12	0,0651	14,69	0,956	14,69	0,956	13,88	0,904
13	0,1647	16,80	2,767	16,67	2,746	15,91	2,620
14	0,2614	19,27	5,037	18,99	4,964	18,31	4,786
15	0,2598	22,11	5,744	21,78	5,658	21,11	5,484
16	0,1591	25,77	4,100	25,17	4,005	24,56	3,907
17	0,0581	30,20	1,755	29,39	1,708	28,80	1,673
18	0,0119	35,86	0,427	34,80	0,414	34,24	0,407
19	0,0012	43,38	0,052	42,00	0,050	41,46	0,050
media:		21,074		20,740		20,054	
desv. típica:		4,437		4,214		4,275	

		LYON-II		GUILBAUD-II		CARGASSONNE	
E-2) n=40 cuños originales, g=25 monedas							
h	p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}.p(h)$	$\hat{n}$	$\hat{n}.p(h)$	$\hat{n}$	$\hat{n}.p(h)$
12	0,0001	14,69	0,001	14,69	0,001	13,88	0,001
13	0,0008	16,80	0,013	16,67	0,013	15,91	0,013
14	0,0047	19,27	0,091	18,99	0,089	18,31	0,086
15	0,0201	22,11	0,444	21,78	0,438	21,11	0,424
16	0,0615	25,77	1,585	25,17	1,548	24,56	1,510
17	0,1347	30,20	4,068	29,39	3,959	28,80	3,879
18	0,2112	35,86	7,574	34,80	7,350	34,24	7,251
19	0,2358	43,38	10,229	42,00	9,904	41,46	9,776
20	0,1853	53,86	9,980	52,06	9,647	51,53	9,549
21	0,1004	69,55	6,983	67,11	6,738	66,60	6,687
22	0,0362	95,66	3,463	92,17	3,337	91,66	3,318
23	0,0082	147,80	1,212	142,22	1,166	141,72	1,162
24	0,0010	304,11	0,304	292,28	0,292	291,78	0,292
media:		45,947		44,482		43,929	
desv. típica:		20,143		19,316		19,341	

		LYON-II		GUILBAUD-II		CARGASSONNE	
E-3) n=40 cuños originales, g=50 monedas							
h	p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}.p(h)$	$\hat{n}$	$\hat{n}.p(h)$	$\hat{n}$	$\hat{n}.p(h)$
21	0,0001	23,98	0,002	24,63	0,002	23,30	0,002
22	0,0009	25,67	0,023	26,19	0,024	24,92	0,022
23	0,0038	27,45	0,104	27,87	0,106	26,69	0,101
24	0,0134	29,35	0,393	29,67	0,398	28,56	0,383
25	0,0367	31,39	1,152	31,61	1,160	30,56	1,122
26	0,0795	33,58	2,670	33,71	2,680	32,71	2,600
27	0,1359	35,94	4,884	35,98	4,890	35,01	4,758
28	0,1836	38,53	7,074	38,46	7,061	37,56	6,896
29	0,1952	41,33	8,068	41,17	8,036	40,30	7,867
30	0,1629	44,40	7,233	44,14	7,190	43,32	7,057
31	0,1062	47,78	5,074	47,42	5,036	46,64	4,953
32	0,0535	51,53	2,757	51,06	2,732	50,31	2,692
33	0,0207	55,70	1,153	55,11	1,141	54,40	1,126
34	0,0061	60,38	0,368	59,67	0,364	58,97	0,360
35	0,0013	65,67	0,085	64,83	0,084	64,17	0,083
36	0,0002	71,70	0,014	70,72	0,014	70,08	0,014
media:		41,056		40,918		40,036	
desv. típica:		5,965		5,764		5,852	

		LYON-II		GUILBAUD-II		CARGASSONNE	
E-4) n=80 cuños originales, g=50 monedas							
h	p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}.p(h)$	$\hat{n}$	$\hat{n}.p(h)$	$\hat{n}$	$\hat{n}.p(h)$
28	0,0001	38,53	0,004	38,46	0,004	37,56	0,004
29	0,0004	41,33	0,017	41,17	0,016	40,30	0,016
30	0,0015	44,40	0,067	44,14	0,066	43,32	0,065
31	0,0049	47,78	0,234	47,42	0,232	46,64	0,229
32	0,0136	51,53	0,701	51,06	0,694	50,31	0,684
33	0,0314	55,70	1,749	55,11	1,730	54,40	1,708
34	0,0615	60,38	3,713	59,67	3,670	58,97	3,627
35	0,1016	65,67	6,672	64,83	6,587	64,17	6,520
36	0,1415	71,70	10,146	70,72	10,007	70,08	9,316
37	0,1659	78,65	13,048	77,51	12,859	76,89	12,756
38	0,1632	86,74	14,156	85,42	13,941	84,82	13,843
39	0,1342	96,28	12,921	94,75	12,715	94,17	12,638
40	0,0918	107,71	9,888	105,94	9,725	105,38	9,674
41	0,0519	121,67	6,315	119,61	6,208	119,06	6,179
42	0,0241	139,10	3,352	136,68	3,294	136,14	3,281
43	0,0090	161,49	1,453	158,61	1,427	158,08	1,423
44	0,0027	191,31	0,517	187,83	0,507	187,31	0,506
45	0,0006	233,04	0,140	228,72	0,137	228,21	0,137
46	0,0001	293,60	0,030	290,03	0,029	289,52	0,029
media:		85,121		83,950		83,233	
desv. típica:		21,573		21,101		21,145	

TABLA VI DESVIACIONES ABSOLUTAS DE LOS RESULTADOS INDIVIDUALES.

Ref.	LYON	GUIL	CARC	MÚLL	BROW	GOOD	MORA	
I.	1	3,20	3,33	4,09	3,00	2,35	3,75	3,81
	2	7,16	7,02	7,92	7,00	4,21	8,04	7,64
	3	2,21	1,78	1,11	3,00	5,00	0,83	1,20
	4	2,21	1,78	1,11	2,00	1,43	3,44	0,55
	5	2,21	1,78	1,11	2,00	3,08	0,83	0,55
	6	3,20	3,33	4,09	3,00	6,96	2,89	5,24
	7	2,21	1,78	1,11	2,00	1,25	5,00	1,20
	8	0,73	1,01	1,69	1,00	0,00	1,58	1,69
	9	5,31	5,31	6,12	5,00	4,33	5,71	6,24
	10	5,77	5,17	4,56	6,00	3,08	6,67	3,57
II	1	29,55	27,11	26,60	31,00	25,00	25,63	22,29
	2	13,86	12,06	11,53	14,00	10,00	15,56	9,26
	3	9,80	10,61	11,20	9,00	2,50	13,44	13,25
	4	4,14	5,20	5,76	4,00	2,50	5,38	5,88
	5	13,86	12,06	11,53	15,00	20,00	10,00	7,45
	6	9,80	10,61	11,20	9,00	2,50	13,44	13,25
	7	3,38	2,00	1,46	4,00	2,86	3,18	1,12
	8	9,80	10,61	11,20	9,00	6,67	11,67	11,20
	9	4,14	5,20	5,76	5,00	10,00	2,50	10,72
	10	9,80	10,61	11,80	10,00	15,00	7,31	13,25
III	1	4,40	4,14	3,32	4,00	3,75	4,12	2,59
	2	4,40	4,14	3,32	5,00	7,12	2,86	3,26
	3	1,33	1,17	0,30	1,00	0,48	2,65	0,28
	4	6,58	6,29	7,29	7,00	11,41	6,89	7,98
	5	4,40	4,14	3,32	5,00	13,26	0,54	2,59
	6	8,61	8,39	9,44	9,00	8,59	2,95	9,49
	7	7,78	7,42	6,64	7,00	2,24	8,44	4,94
	8	4,06	4,02	4,99	4,00	5,97	3,51	5,36
	9	1,47	1,54	2,44	1,00	1,72	1,11	2,60
	10	4,06	4,02	4,99	5,00	10,83	2,50	7,49
IV	1	14,33	15,17	15,83	13,00	3,44	19,66	18,31
	2	16,28	14,75	14,17	14,00	1,67	22,63	1,65
	3	8,30	9,28	9,92	9,00	15,53	5,00	12,41
	4	6,74	5,42	4,82	7,00	7,50	6,36	6,28
	5	8,30	9,28	9,08	8,00	7,94	10,77	15,69
	6	6,74	5,42	4,82	7,00	7,50	6,36	6,28
	7	16,28	14,75	14,17	17,00	22,08	12,86	12,27
	8	6,74	5,42	4,82	5,00	6,47	15,00	3,67
	9	14,33	15,17	15,83	14,00	11,94	15,19	17,50
	10	8,30	9,28	9,92	9,00	15,53	5,00	12,41

○ : menor desviación dentro de cada línea.



Lám. 14

El presente trabajo tiene como objeto continuar el estudio de las monedas púnicas provenientes de las excavaciones de D. Luis Siret, realizadas en Villaricos (Almería), a comienzos del siglo actual y que se hallan en la actualidad depositadas en el Gabinete Numismático del Museo Arqueológico Nacional de Madrid.<sup>1</sup>

Dimos una primera noticia de ellas en "Moneda inédita de Baria"<sup>2</sup> y ahora publicamos otro lote de 82 monedas de bronce inéditas, que corresponden al tipo n.º 286 de Villaronga.<sup>3</sup>

Villaronga recogió en su obra 21 monedas con peso de este tipo, al cual nosotros añadimos ahora 82, lo que expresa la importancia de las monedas que damos a conocer.

La descripción morfológica comprende el peso que ha sido obtenido con una balanza de precisión de  $\pm 0,05$  grs; las dimensiones del módulo y el grosor se han medido con un pie de rey de  $\pm 0,05$  mm de precisión. La posición de cuños viene expresada por un numeral que define la posición del reverso sobre una esfera del reloj, teniendo en cuenta que el anverso siempre es vertical y que el reverso es la saeta grande. La conservación se ha señalado de acuerdo con el desgaste de la pieza siguiendo la escala en uso: frusta (F), muy gastada (MG), bastante gastada (BG), sin gastar (SG) y flor de cuño (FC). Todos estos datos figuran en el catálogo por este orden.

#### CATALOGO

Anv. Cabeza de Hércules cubierta por piel de león, mirando a la derecha.

Rev. Palmera con frutos.

Referencia bibliográfica:

A. VIVES ESCUDERO, *La Moneda Hispánica*, Madrid 1926, lám. VIII n.º 9.

M. GOMEZ MORENO, *Misceláneas*, Madrid 1949. Notas sobre numismática hispana, p. 176.

E.S.G. ROBINSON, Punic coins in Spain and their bearing on the roman republican series, in *Essays in Roman Coinage presented to H. Mattingly*, Oxford 1956, n.º 5d.

J.M. DE NAVASCUES, *Las monedas hispanas del Museo Arqueológico Nacional de Madrid*, Barcelona 1969, I, n.º 469 a 477.

SYLLOGE NUMMORUM GRAECORUM, *The Royal Collection of Coins and Medals of the Danish National Museum*, 42, North Africa, Copenhagen 1969, n.º 299.

L. VILLARONGA, *Las monedas hispano-cartaginesas*, Barcelona 1973, XII-II, n.º 286.

1. 23,20; 23,3; 7,6; 12; BG	6. 13,85; 23,5; 5,4; 10; F
2. 17,60; 23,2; 6,5; 9; MG	7. 23,25; 24,4; 6,6; 11; F
3. 16,15; 23,3; 5,4; 12; MG	8. 22,05; 24,4; 7,6; 12; F
4. 16,0 ; 23,5; 5,4; 10; MG	9. 20,75; 24,4; 6,5; 11; F
5. 13,30; 23,2; 3,5; 12; MG	10. 19,12; 24,3; 6,0; 11; MG

- |     |        |       |       |     |    |     |        |       |       |     |    |
|-----|--------|-------|-------|-----|----|-----|--------|-------|-------|-----|----|
| 11. | 18,70; | 24,4; | 7,6;  | -;  | F  | 43. | 20,74; | 25,5; | 6,5;  | 11; | MG |
| 12. | 17,85; | 24,3; | 5,4;  | 6;  | MG | 44. | 21,05; | 25,4; | 6,5;  | 12; | MG |
| 13. | 17,75; | 24,6; | 6,5;  | 12; | BG | 45. | 21,10; | 25,4; | 5,6;  | 12; | F  |
| 14. | 17,05; | 24,3; | 5,5;  | 6;  | MG | 46. | 21,80; | 25,5; | 6,5;  | 11; | MG |
| 15. | 16,85; | 24,4; | 7,6;  | 12; | BG | 47. | 22,55; | 25,4; | 5,4;  | 11; | MG |
| 16. | 12,05; | 24,8; | 5,0;  | 12; | F  | 48. | 22,85; | 25,4; | 7,6;  | -;  | F  |
| 17. | 11,75; | 24,3; | 3,35; | 12; | F  | 49. | 22,45; | 25,4; | 6,6;  | 10; | MG |
| 18. | 12,15; | 25,4; | 4,3;  | 11; | F  | 50. | 23,55; | 25,4; | 3,65; | 11; | F  |
| 19. | 13,83; | 25,4; | 5,4;  | 10; | F  | 51. | 24,3;  | 25,4; | 7,6;  | 12; | F  |
| 20. | 13,45; | 25,4; | 6,5;  | 12; | F  | 52. | 24,35; | 25,4; | 7,6;  | 12; | F  |
| 21. | 14,55; | 25,0; | 5,0;  | 10; | F  | 53. | 25,24; | 25,4; | 7,3;  | 10; | MG |
| 22. | 14,55; | 25,4; | 5,4;  | 8;  | F  | 54. | 26,0;  | 25,5; | 7,6;  | 12; | MG |
| 23. | 15,00; | 25,4; | 6,5;  | 12; | MG | 55. | 15,6;  | 26,5; | 5,4;  | 11; | MG |
| 24. | 16,62; | 25,0; | 6,4;  | 12; | MG | 56. | 15,85; | 26,5; | 5,4;  | 10; | BG |
| 25. | 16,62; | 25,5; | 5,4;  | 12; | MG | 57. | 16,85; | 26,5; | 7,6;  | 12; | F  |
| 26. | 16,85; | 25,5; | 5,5;  | -;  | F  | 58. | 16,2;  | 26,6; | 5,4;  | 12; | MG |
| 27. | 16,70; | 25,4; | 5,4;  | 6;  | MG | 59. | 17,35; | 26,6; | 5,4;  | 8;  | BG |
| 28. | 16,33; | 25,5; | 5,4;  | 10; | F  | 60. | 17,70; | 26,5; | 5,4;  | 12; | MG |
| 29. | 17,60; | 25,4; | 6,5;  | 12; | MG | 61. | 17,60; | 26,5; | 5,4;  | -;  | F  |
| 30. | 17,65; | 25,4; | 6,5;  | 8;  | F  | 62. | 18,15; | 26,5; | 7,6;  | 12; | MG |
| 31. | 17,45; | 25,5; | 6,5;  | 12; | F  | 63. | 18,67; | 26,0; | 6,3;  | 11; | MG |
| 32. | 18,60; | 25,4; | 6,0;  | 12; | F  | 64. | 20,55; | 26,5; | 6,5;  | -;  | F  |
| 33. | 18,50; | 25,4; | 5,5;  | 6;  | F  | 65. | 20,45; | 26,3; | 8,5;  | 12; | BG |
| 34. | 18,70; | 25,6; | 6,4;  | 12; | MG | 66. | 20,50; | 26,0; | 7,0;  | 12; | BG |
| 35. | 18,60; | 25,4; | 5,4;  | 8;  | F  | 67. | 21,74; | 26,0; | 7,8;  | 11; | F  |
| 36. | 18,25; | 25,4; | 5,4;  | 11; | MG | 68. | 21,74; | 26,5; | 6,7;  | 12; | SG |
| 37. | 19,75; | 25,4; | 6,6;  | -;  | F  | 69. | 22,52; | 26,0; | 7,0;  | -;  | F  |
| 38. | 19,95; | 25,0; | 7,0;  | -;  | F  | 70. | 22,33; | 26,5; | 6,5;  | 12; | SG |
| 39. | 20,60; | 25,4; | 6,5;  | 8;  | MG | 71. | 24,65; | 26,5; | 7,6;  | 10; | BG |
| 40. | 20,30; | 25,4; | 6,6;  | -;  | F  | 72. | 25,10; | 26,5; | 6,5;  | 12; | MG |
| 41. | 20,00; | 25,5; | 5,5;  | -;  | F  | 73. | 25,05; | 27,6; | 7,6;  | 12; | F  |
| 42. | 20,72; | 25,3; | 6,5;  | 12; | MG | 74. | 25,15; | 27,6; | 7,6;  | 11; | F  |

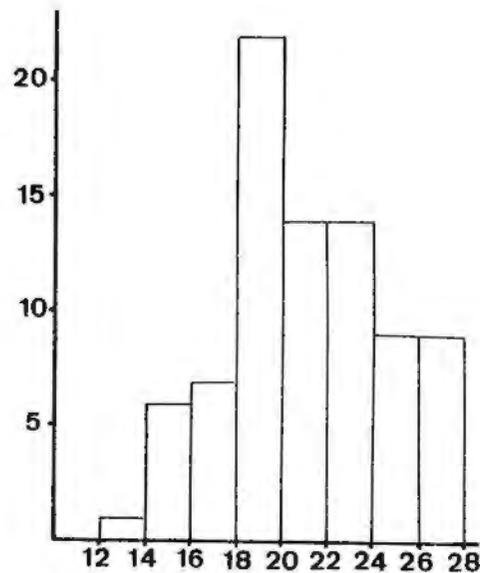
- 75. 24,88; 27,5; 7,6; 11; MG
- 76. 21,20; 27,6; 6,5; 11; BG
- 77. 17,25; 27,6; 7,6; 10; F
- 78. 16,55; 27,6; 5,4; 12; BG

- 79. 19,75; 29,25; 7,6; 11 MG
- 80. 17,20; 29,8; 6,5; 12; MG
- 81. 15,10; 29,9; 6,5; 8; F
- 82. 18,22; 22,0; 6,0; 12; F

**Metrología.** Damos a continuación los datos estadísticos de la muestra de las monedas de Baria ahora publicadas:<sup>4</sup>

N.º de monedas = 82  
 Peso medio = 19,03  
 Desviación típica = 3,45  
 Coeficiente de variación = 18%  
 Coeficiente de asimetría = 0,07  
 Coeficiente de aplastamiento = 2,36.

Datos que nos definen una muestra completamente normal.



**Histograma de pesos.**<sup>5</sup> Para hallar el número de intervalos aplicamos la siguiente fórmula:

$$N.º \text{ intervalo} = 1 + 3,3 \log N = 7,32$$

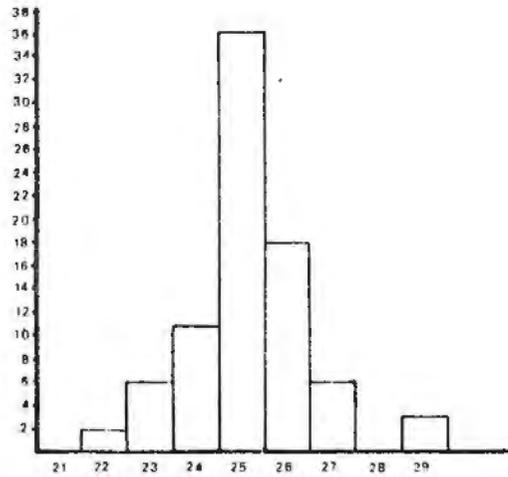
$$\text{Valor intervalo} = \frac{P.\text{max.} - P.\text{min}}{7,32} = 1,95$$

para redondear tomaremos el intervalo de 2 gramos. Siendo el peso medio de 19,03, el intervalo central será de 18,01 a 20,00.

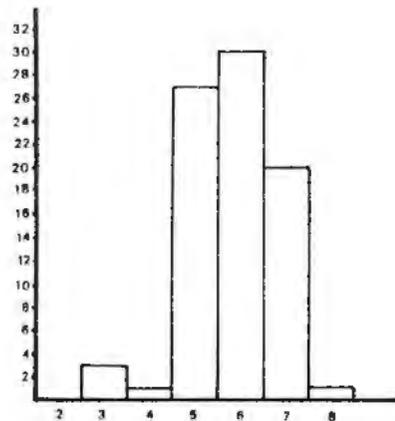
La escala de frecuencias es la siguiente:

10,01 a 12 . . . . .	1 moneda	18,01 a 20 . . . . .	14 monedas
12,01 a 14 . . . . .	6 monedas	20,01 a 22 . . . . .	14 monedas
14,01 a 16 . . . . .	7 monedas	22,01 a 24 . . . . .	9 monedas
16,01 a 18 . . . . .	22 monedas	24,01 a 26 . . . . .	9 monedas

Con estos datos trazamos el histograma.



*Histograma de módulos.* Con el intervalo de 1 m/m trazamos el histograma de módulos, o sea el diámetro de las monedas.



*Histograma de grosor.* Con el intervalo de 1 m/m trazamos el histograma del grosor de las monedas.

## CONSECUENCIAS

En las conclusiones a nuestro trabajo anterior<sup>6</sup> apuntábamos que aquellas monedas, con peso medio de 5,45 gr, podían ser cuartos de las que ahora estudiamos. Por aquel entonces solo conocíamos las monedas publicadas por Villaronga, que presentaban un peso medio de 21,86 grs. Hoy llegamos a una mayor exactitud al tener más materiales, que nos dan un peso medio de 19,03.

Juntando las monedas publicadas en este trabajo y las que publicó Villaronga obtenemos un peso medio total de 19,54 grs.

Posiblemente estas monedas son un doble de las de la clase XI, tipo III, grupo II,<sup>7</sup> de peso medio de 10,20 grs. Siendo la discrepancia de tan solo un 4%.

## NOTAS

1. Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Martín Almagro Basch, Director del Museo Arqueológico Nacional de Madrid, por haber puesto a nuestra disposición estos fondos, así como al Dr. Martín Almagro Gorbea por su apoyo y ayuda.
2. J. M.<sup>a</sup> VIDAL BARDAN, Moneda inédita de Baria, *Acta Numismática* IX, 1979, 37-39.
3. L. VILLARONGA, *Las monedas hispano-cartaginesas*, Barcelona 1973, clase XII, tipo II, n.º 286.
4. S. RIOS, *Análisis estadístico aplicado*, Madrid 1976, p. 55 y ss.
5. L. VILLARONGA, Trazado del histograma de pesos de una muestra de monedas, con algunas consecuencias, *Acta Numismática*, IX, 1979, 11-19.
6. J.M. VIDAL BARDAN, Moneda inédita de Baria, citado.
7. L. VILLARONGA, *Las monedas hispano-cartaginesas*, citado.



# UN NOU MÈTODE ESTADÍSTIC, APLICACIÓ A L'ESTUDI DE LES PRIMERES EMISSIONS IBÈRIQUES DE BRONZE CATALANES I DEL PAÍS VALENCIÀ

L. VILLARONGA

Làm. 15 a 18

Anteriorment ja hem dirigit les nostres recerques a l'estudi de la metrologia de les nostres monedes antigues<sup>1</sup>, enguany hem seguit nous camins aplicant l'estadística<sup>2</sup> i ara estudiarem amb aquests nous mètodes la metrologia que sequeixen les primeres emissions ibèriques catalanes i les del País Valencià.

Cronològicament, el nostre estudi va de finals del segle III a.C. a mitjans del segle II a.C.

Comque l'estudi resulta molt complex, per alleugerir-lo, sols ens referirem a les emissions més representatives, amb les quals traçarem un esquema, que més endavant podrem desenvolupar totalment.

El nostre treball té per base fonamental els dos sistemes metrològics emprats pels cartaginesos en llurs encunyacions a Hispània<sup>3</sup>. El primer amb un sistema de 8/9 grs. i el segon de 10 grs., que separarem per la data de 214/212 a.C., que avui podem precisar més, i fixem en 211, data decisiva per la història de la moneda al crear-se el denari romà i passar el sistema del bronze a sexatantal.

Primer, presentarem el mètode que apliquem, després passarem a l'estudi de les emissions monetàries, de les quals establím diversos grups, segons el sistema metrològic emprat.

Per no fer massa carregós el text, en apèndix donarem els paràmetres estadístics de cada emissió, amb els quals fem els càlculs oportuns.

## MÈTODE

*Paràmetres estadístics.* De cada emissió de monedes, ens han arribat uns quants exemplars, que formen una mostra. D'aquesta coneixem el pes de cada moneda i podem calcular el pes mig, que designarem per  $\bar{x}$ , i que és el resultat de dividir la suma de tots llurs pesos pel número de monedes:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$$

La discrepància del pes de cada moneda del pes mig queda determinada per la desviació típica, que designem per  $s$ , i que calculem extraient l'arrel quadrada de la suma dels quadrats de les diferències entre cada pes i la mitja, dividida pel número de monedes:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

La desviació típica té unes propietats interessants. En el interval comprès entre  $\bar{x} - s$  i  $\bar{x} + s$  es troben el 68 % dels elements de la mostra i entre  $\bar{x} - 2s$  i  $\bar{x} + 2s$  el 95 %.

*Interval de confiança.* Un cop coneguts el pes mig i la desviació típica de la mostra, el pas següent a seguir és arribar a tenir una idea clara de la població d'on ha estat presa i el més important és poder saber entre quins límits es troba el pes mig de la població.

L'error típic de la mitja és  $s/\sqrt{N}$ , que segueix una distribució normal quan el número d'elements és superior a 30, i una distribució de la t de Student, quan és inferior a 30.

Amb l'error típic de la mitja, obtindrem l'interval de confiança de la mitja, que serà els límits entre els quals es trobarà la mitja de la població, amb una probabilitat determinada.

En el cas de més de 30 elements, trobarem els límits de la mitja de la població, amb una probabilitat del 95 %, emprant la fórmula:

$$\bar{x} + 1,96 \frac{S}{\sqrt{N}} \quad \text{i} \quad \bar{x} - 1,96 \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Quan disposem de menys de 30 monedes, els límits de la mitja, els calculem amb la fórmula:

$$\bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{i} \quad \bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

El valor de t el trobarem a les taules adequades, i prendrem el valor de  $\alpha = 0,05$ , per aconseguir-lo al 95 % de probabilitat.

Amb aquests càlculs arribem a tenir una idea dels límits entre els quals es troba el valor de la mitja de la població.

Quan tinguem diverses mostres i coneguem els límits de la mitja de llurs poblacions, si coincideixen parcialment aquests valors podem pensar que pertanyen a la mateixa població i per comprovar-ho verificarem si la diferència de llurs pesos mitjos és deguda a l'atzar o bé és significativa, pel test de la t de Student.

### Test de la t de Student

Amb el test de la t de Student verificarem si la diferència de les mitges de dues mostres és deguda a l'atzar o bé és significativa, aplicant el test de la hipòtesis nul·la a la diferència de llurs mitges:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \cdot \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n_1 \bar{x}^2 + \sum y_i^2 - n_2 \bar{y}^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

fent  $d = 0$  per la hipòtesi nul·la, essent els graus de llibertat  $n_1 + n_2 - 2$ .

Calculat el valor de l'estadístic t i sabuts els graus de llibertat, buscarem a les taules el nivell de significació a què es pot acceptar el valor de  $t^2$ .

El nivell del 5 % és admès per poder acceptar la hipòtesis nul·la de la igualtat de les mitges. Per dessota del 5 % es rebutja.

### Anàlisi de variacions

Els grups establerts pel test de les mitges els podem sotmetre a l'anàlisi de variacions, per tenir una seguretat total respecte a que les diferències entre llurs pesos mitjos són degudes a l'atzar i veure amb quin percentatge de probabilitat<sup>6</sup>.

Obtingut el valor de l'estadístic F, buscarem a les taules el percentatge de probabilitat a què es pot acceptar, essent el 5% suficient per a que es verifiqui la hipòtesi nul·la de que els pesos mitjos de llurs emissions pertanyen a la mateixa població.

### En resum

Les emissions que tenen coincidència parcial en llurs intervals de confiança, són sotmeses al test t-Student per veure si pertanyen a la mateixa població i en cas afirmatiu es pot assegurar per l'anàlisi de variacions.

Les emissions que compleixen aquestes condicions pertanyen a la mateixa població i han estat encunyades amb el mateix patró i coetàniament.